Modalitäten und Quantenmechanik

bei P.Mittelstaedt, B.C.van Fraassen und M.L.Dalla Chiara

Franz J.Burghardt
Institut für Theoret. Physik
Universität zu Köln

1980

Inhalt

Einleitung

I. Modale Quantenlogik bei P.Mittelstaedt
   1. Modallogik auf metasprachlicher Ebene
   2. Beweisprozeß- und Real-Semantik der Modalitäten
   3. Hilbertraum-Darstellung der Modalitäten

II. Modale Interpretation der Quantenmechanik bei B.C.van Fraassen
   1. Warum und wozu eine modale Interpretation ?
   2. Aufbau einer modalen Sprache der Quantenmechanik
   3. Modalitäten und "value-states"

III. Interpretation der Quantenlogik im Rahmen einer modalen Sprache bei M.L.Dalla Chiara
   1. Zur Bedeutung der Einbettung nichtklassischer in modale Systeme
   2. Quantenlogik und ihre modale Interpretation
   3. Hilbertraum-Darstellung der Modalitäten

IV. Vergleichende Bemerkungen

Anhang: Sprachlich-logische Strukturen aus axiomatischer Sicht
   1. Formale Sprachen
   2. Logische Systeme

Literatur

Einleitung

In den letzten zehn Jahren wurde von mehreren Grundlagenforschern der Physik versucht, im Rahmen einer Interpretation der Quantenmechanik Modalitäten wie "möglich", "notwendig" etc. zu berücksichtigen. Wir wollen uns im folgenden mit drei Ansätzen dieser Art beschäftigen, deren Schwerpunkt auf der Untersuchung bzw. Konstruktion einer formalen Sprache der Quantenmechanik und damit verbunden auf der Untersuchung der Quantenlogik liegt.

(1) Bei P.Mittelstaedt (Köln) wird in der Tradition von Carnap-O.Becker - Lorenzen bewußt auf eine Erweiterung der dialogisch begründeten Objektsprache, in der unmittelbar über ein physikalisches System gesprochen wird, verzichtet, da der Begriff "notwendig" bereits in der Metasprache vorhanden ist.

(2) B.C.van Fraassen (Toronto) dagegen erweitert in der Tradition von Lewis-Kripke die Objektsprache um einen Funktor $\Box$, der die Notwendigkeit eines Satzes ausdrücken soll.

(3) M.L.Dalla Chiara (Florenz) benutzt neben der nichtmodalen Objektsprache, in der die Quantenlogik formuliert ist, eine zweite modale Sprache, in die die Objektsprache eingebettet wird.

Auch wenn im folgenden Ähnlichkeiten in gewissen Details dieser drei Zugänge sichtbar werden, so sollten doch weder die genannten gravierenden Unterschiede im formalen Aufbau noch die völlig verschiedenen Motive außer Acht gelassen werden.

(1) Bei Mittelstaedt geht es um die Frage, wie bei einem konstruktiven Aufbau der Sprache der Physik Modalitäten benutzt werden können.

(2) Van Fraassen lehnt gewisse Annahmen der Quantenmechanik, z.B. das Projektionspostulat, ab und konstruiert eine formale Sprache mit Modalitäten, die es ihm gestattet, den quantenmechanischen Meßprozeß ohne Benutzung der von ihm abgelehnten Postulate zu beschreiben.

(3) Dalla Chiara dagegen hat überhaupt nicht das Bedürfnis, Modalitäten in die Sprache der Quantenmechanik einzuführen. Die

Objektsprache wird lediglich aus dem Grund mit einer zweiten, modalen Sprache in Verbindung gebracht, um gewisse nichtklassische Eigenschaften der Objekt- bzw. Metasprache "verständlich" zu machen.

I. Modale Quantenlogik bei P.Mittelstaedt

1. Modallogik auf metasprachlicher Ebene

Die von Mittelstaedt entwickelte Objektsprache mit dialogischer Semantik, die insbesondere für quantenmechanische Systeme benutzt werden kann, soll hier nur kurz angedeutet werden; eine ausführliche Darstellung findet man z.B. in [15].
Neben beweisdefiniten elementaren Aussagen, deren Wahrheit z.B. durch eine Messung festgestellt werden kann, gibt es zusammengesetzte dialogdefinite Aussagen, deren Wahrheit in einem Dialog zu prüfen ist, der durch Rahmen- und Argumentregeln festgelegt ist, die u.a. die Möglichkeiten für Angriffe und Verteidigungen der verschiedenen Verknüpfungen festlegen:

Aussage	Symbol	Angriffs-möglichk.	Verteid.-möglichk.
Konjunktion	$A \wedge B$	1?, 2?	A, B
Disjunktion	$A \vee B$	?	A, B
materielle Implikation	$A \rightarrow B$	A	B
Negation	$\neg A$	A	

Im materiellen Dialog D_m können auch die Kommensurabilität $k(A,B)$ zweier Aussagen und die Wahrheit der elementaren Aussagen gemäß

	Symbol	Angriffs-möglichk.	Verteid.-möglichk.
element. Aussage	a	a?	a!

geprüft werden. Besitzt der Proponent P, der die Wahrheit einer Aussage A behauptet, im materiellen Dialog eine Gewinnstrategie, die unabhängig von der Argumentwahl des Opponenten ist, so ist die Aussage A "materiell wahr", symbolisch: $\vdash_{D_m} A$. In §2 werden wir diesen Wahrheitsbegriff für Dialoge über quantenmechanische Systeme präzisieren.
Der formale Dialog D_f läßt keine Angriffe auf elementare Aussagen zu, und Kommensurabilitätsfragen werden durch gewisse Aussageverknüpfungen ersetzt. Besitzt der Proponent in einem formalen Dialog eine Gewinnstrategie für A, so heißt A "formal wahr", und wir schreiben $\vdash_{D_f} A$.

Die Menge aller formal wahren Aussagen läßt sich durch den Kalkül Q_{eff} der <u>effektiven Quantenlogik</u> darstellen, der bzgl. der dialogischen Semantik konsistent und vollständig ist. Bei Hinzufügung des Tertium-non-daturs zu Q_{eff} als wahre Aussage erhält man den Kalkül Q der <u>vollen Quantenlogik</u>, dessen Lindenbaum-Algebra bekanntlich ein orthokomplementärer quasimodularer Verband (in der neueren Literatur "ortholattice" genannt) ist.

Ist in Q_{eff} eine Figur $A \leq B$ ableitbar, so ist die zugehörige Implikation $A \rightarrow B$ formal wahr:

$$\vdash_{Q_{eff}} A \leq B \quad \curvearrowleft \quad \vdash_{D_f} A \rightarrow B$$

Eine Aussage A ist formal wahr genau dann, wenn die Implikation $V \rightarrow A$ mit der "immer wahren" Aussage V formal wahr ist; V darf im Dialog nicht angegriffen werden und heißt "Objekt-Verum". Es gilt:

$$\vdash_{Q_{eff}} V \leq A \quad \curvearrowleft \quad \vdash_{D_f} A$$

Wird beim Dialog ein Wissen W - etwa die Präparation eines quantenmechanischen Systems - als bekannt vorausgesetzt, und hat der Proponent mit Hilfe des Wissens W eine Gewinnstrategie für A, so schreiben wir $W \vdash_{D_f} A$ und es gilt

$$W \vdash_{D_f} A \quad \curvearrowleft \quad \vdash_{D_f} W \rightarrow A \quad \curvearrowleft \quad \vdash_{Q_{eff}} W \leq A$$

Statt $W \vdash_{D_m} A$ wird auch das Symbol $\Delta_W A$ benutzt:

$$\Delta_W A \; : \curvearrowleft \quad W \vdash_{D_m} A \quad \curvearrowleft \quad \vdash_{D_m} W \rightarrow A \quad \curvearrowleft \quad \vdash_{Q_{eff}^{(f)}} W \leq A$$

A heißt in diesem Fall "<u>notwendig relativ zu W</u>".

Statt des materiellen Dialogs D_m kann der formale Dialog D_f benutzt werden, falls man in D_f Relationen $A_j \rightarrow B_j$ voraussetzt, die die kontingenten Gesetze $\Gamma_i^{f(q)}$ der Quantenmechanik darstellen sollen (vgl. [16, pp.488]):

$$\vdash_{D_m} W \rightarrow A \quad \curvearrowleft \quad \bigwedge_j (A_j \rightarrow B_j) \vdash_{D_f} W \rightarrow A$$

Dies entspricht im Kalkül einer Erweiterung um die entsprechenden Anfänge $A_j \leq B_j$, durch die wir die Kalküle $Q_{eff}^{(f)}$ bzw. $Q^{(f)}$ erhalten. (Zur Beziehung der einzelnen Kalküle vgl. [22].)

Während die relative Notwendigkeit im Rahmen der Objektsprache durch $\Delta_W A :\leftrightarrow W \vdash_{D_m} A$ eingeführt werden kann, ist zur Formulierung der (absoluten) Notwendigkeit nicht etwa eine Erweiterung der Objektsprache um ein weiteres Symbol für "notwendig", sondern - den Gedanken R.Carnaps, O.Beckers und P.Lorenzens folgend (vgl. [17, pp.8]) - lediglich eine Betrachtung der Metasprache erforderlich.

Die <u>elementaren Meta-Aussagen</u> $\bar{a}$ sind die beweisdefiniten Sätze

"A ist materiell wahr" : $\vdash_{D_m} A \quad (\leftrightarrow \vdash_{Q_{eff}^{(f)}} V \leq A)$

"A ist formal wahr" : $\vdash_{D_f} A \quad (\leftrightarrow \vdash_{Q_{eff}} V \leq A)$

Ein vorgelegter Beweis für die Wahrheit einer solchen elementaren Meta-Aussage kann mit Hilfe des Kalküls $Q_{eff}^{(f)}$ auf seine Richtigkeit hin geprüft werden.

Wie in der Objektsprache gibt es dialogdefinite, durch Meta-Junktoren zusammengesetzte Meta-Aussagen, für die neben weiteren Rahmen- und Argumentregeln u.a. folgende Regel für den Meta-Dialog gilt:

Meta-Aussage	Symbol	Angriffs-möglichk.	Verteid.-möglichk.
Meta-Konjunktion	$\bar{A} \barwedge \bar{B}$	1?, 2?	$\bar{A}, \bar{B}$
Meta-Disjunktion	$\bar{A} \barvee \bar{B}$	?	$\bar{A}, \bar{B}$
materielle Meta-Implikation	$\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$
Meta-Negation	$\neg \bar{A}$	$\bar{A}$	

Im <u>materiellen Meta-Dialog</u> sind Angriffe auf die elementaren Meta-Aussagen zugelassen:

		Angriffs-möglichk.	Verteid.-möglichk.
element. Meta-Aussage	$\bar{a}$	$\bar{a}$?	$\bar{a}$!

Die Verteidigung $\bar{a}$! besteht dann in einer Ableitung der Figur $V \leq A$ im Kalkül Q_{eff} bzw. $Q_{eff}^{(f)}$.

Statt $\vdash_{Q_{eff}^{(f)}} V \leq A$ schreiben wir auch $V \lesssim A$ (In [17] und [22] wurde dieses Symbol für $\vdash_{Q_{eff}} V \leq A$ benutzt!) und betrachten junktorenlogische Verknüpfungen

$\overline{A}^j(W \lesssim A_i, V \lesssim B_j)$

deren elementare Meta-Aussagen die Form $W \lesssim A_i$ oder $V \lesssim B_j$ haben.

<u>Def.</u>: $\overline{A}^j(W \lesssim A_i, V \lesssim B_j)$ heißt "<u>notwendig</u>"

$:\Leftrightarrow$ $\overline{A}^j$ ist materiell wahr für jedes W i.S. der metasprachlichen Dialog-Semantik;

d.h. der Proponent P hat im materiellen Meta-Dialog für jedes W eine Gewinnstrategie für $\overline{A}^j$.

In [22] habe ich gezeigt, daß alle notwendigen Meta-Aussagen $\overline{A}^j(W \lesssim A_i, V \lesssim B_j)$ durch einen effektiven Aussagenkalkül $\widetilde{M}_{eff}$ erfaßt werden können, der bzgl. der materiellen Dialog-Semantik konsistent und vollständig ist. Dieser Kalkül, dessen Figuren die Form $\overline{A} \leqq \overline{B}$ haben (wobei $\overline{A}, \overline{B}$ Verknüpfungen der elementaren Meta-Aussagen $W \lesssim A_i, V \lesssim B_j$ sind), besteht aus drei Teilen:

(1) dem intuitionistischen Kalkül der formalen Quanten-Metalogik, in dem alle Meta-Aussagen abgeleitet werden können, die i.S. eines formalen Meta-Dialogs wahr sind,

(2) dem "objektsprachlichen Teil", in dem der Kalkül $Q_{eff}^{(f)}$ der Objektsprache metasprachlich formuliert wird,

(3) dem "modalen Teil", der die Verbindung zwischen der formalen Metalogik (1) und dem objektsprachlichen Teil (2) herstellt. Er ermöglicht es, objektsprachliche Wahrheiten in der Metasprache zu berücksichtigen, und besteht aus folgenden Kalkülanfängen:

($\underline{\vee}$ ist die "immer wahre" Meta-Aussage, das "<u>Meta-Verum</u>", $\overline{\wedge}$ die "immer falsche" Meta-Aussage, das "<u>Meta-Falsum</u>".)

$W \lesssim \wedge \leqq \overline{\wedge}$

$W \lesssim (A \rightarrow B) \leqq W \lesssim A \Rightarrow W \lesssim B$

$W \lesssim A \overline{\wedge} W \lesssim B \leqq W \lesssim (A \wedge B)$

$V \lesssim A \leqq W \lesssim A$

$V \lesssim (A \rightarrow B) \leqq V \lesssim A \Rightarrow V \lesssim B$

$V \lesssim A \overline{\wedge} V \lesssim B \leqq V \lesssim (A \wedge B)$

Da die notwendigen Meta-Aussagen für jedes W wahr sind, kann das Zeichen $W \lesssim$ durch das Symbol $\triangle$ ersetzt werden, und die wichtigsten Anfänge des "modalen Teils" lauten dann:

$\Delta \wedge \leqq \top$

$\Delta (A \rightarrow B) \leqq \Delta A \Rightarrow \Delta B$

$\Delta A \sqcap \Delta B \leqq \Delta (A \wedge B)$

Diese Figuren weisen starke Ähnlichkeiten mit den modalen Teilen der bekannten Modallogik-Axiomensystemen auf (vgl. [17,pp.95] und [8]).

2. Beweisprozeß- und Real-Semantik der Modalitäten

Wir betrachten ein quantenmechanisches System S mit dem zugehörigen Hilbertraum $\mathcal{H}(S)$. $\mathcal{S}$ sei eine Menge von weiteren quantenmechanischen Systemen S^i mit den jeweiligen Hilberträumen $\mathcal{H}(S^i)$.

Def.: (vgl. [20,p.9]) $\mathcal{M}_{\mathcal{H}(S)} := \{ S^i \in \mathcal{S} \mid \mathcal{H}(S^i) = \mathcal{H}(S) \}$

Hat S die Präparation W, so schreiben wir S=S(W) oder W = W(S). Unter "Präparation" verstehe ich hierbei im Sinne der Prozeß-Semantik (vgl. [21]) das durch Meß-, Beweis- und Dialog-Prozesse gewonnene Wissen über S.

Def.: $\mathcal{M}^{(W)}_{\mathcal{H}(S)} := \{ S^i \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}(S)} \mid S^i = S^i(W) \}$

$\mathcal{M}_{\mathcal{H}(S)}$ ist also die Menge der Systeme S^i, die durch den gleichen Hilbertraum wie S dargestellt werden, während die in $\mathcal{M}^{(W)}_{\mathcal{H}(S)}$ enthaltenen S^i noch zusätzlich die gleiche Präparation W haben sollen.

Sei A eine Aussage über das System S(W).

Def.: A ist wahr in S(W) (symbolisch: $V_{S(W)}\ A$)

$:\Leftrightarrow \quad S(W) \vdash_{D_m} A$

d.h. A ist wahr in S(W) genau dann, wenn in einem materiellen Dialog der Proponent eine Gewinnstrategie für A hat unter der Voraussetzung, daß S in der Präparation W vorliegt.

Def.: A ist notwendig in S(W) (symbolisch: $\Delta_{S(W)}\ A$)

$:\Leftrightarrow \quad W \vdash_{D_m} A$

d.h. A ist notwendig in S(W) genau dann, wenn in einem materiellen Dialog der Proponent P eine Gewinnstrategie für A hat, wobei P das Wissen W über das System S bei der Argumentation benutzen darf.

Bei der Notwendigkeit wird also - im Gegensatz zur Wahrheit - im materiellen Dialog um die Aussage A nicht mehr auf ein bestimmtes System S Bezug genommen; dies führt zur folgenden Interpretation der Notwendigkeit ([20,p.10] "ensemble-theoretic interpretation"):

Äußere Semantik der Notwendigkeit

A ist notwendig in S(W) $\overset{\text{Int.}}{\Longleftrightarrow}$ $\bigwedge_{S^i \in \mathcal{M}^{(W)}_{\mathcal{H}(S)}} S^i(W) \vdash_{D_m} A$

d.h. die Gewinnstrategie des Proponenten im materiellen Dialog um die Aussage A ist unabhängig von dem gewählten $S^i \in \mathcal{M}^{(W)}_{\mathcal{H}(S)}$. Diese Interpretation ist natürlich abhängig vom Umfang der Menge γ, die bei Mittelstaedt [20,p.9] als "hinreichend groß, endlich oder unendlich" vorausgesetzt wird.

Benutzt man die Äquivalenzrelation $\simeq \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{H}(S)} \times \mathcal{M}_{\mathcal{H}(S)}$, definiert durch

$$S^i \simeq S^j \quad \curvearrowleft \quad W(S^i) = W(S^j),$$

so läßt sich die obige Interpretation der Notwendigkeit und analog dazu eine Interpretation der Möglichkeit wie folgt schreiben:

A ist notwendig in S(W)	$\overset{\text{Int.}}{\leftrightarrow}$	$\bigwedge_{S^i \in \gamma} (S^i \simeq S \curvearrowright S^i \vdash_{D_m} A)$
A ist möglich in S(W)	$\overset{\text{Int.}}{\leftrightarrow}$	$\bigvee_{S^i \in \gamma} (S^i \simeq S \curvearrowright S^i \vdash_{D_m} A)$

Neben dieser Interpretation durch ein Ensemble gleichartig präparierter Systeme hat Mittelstaedt [21,p.27] eine Leibniz-Kripke-artige Interpretation der Modalitäten durch "<u>mögliche Welten</u>" vorgeschlagen:

Das Wissen W sei eine Maximalbeschreibung des Systems S, d.h. S befindet sich in einem reinen Zustand und W sei perfekt. Da aber W nicht vollkommen ist, gibt es bzgl. W objektiv unentschiedene Aussagen. (In einer klassischen Sprache bzw. für ein klassisches physikalisches System ist grundsätzlich immer ein vollkommenes Wissen möglich, und eine unentschiedene Aussage ist nur subjektiv unentschieden.)

W werde nun durch Parameter $\lambda^{(\nu)}$ derart ergänzt, daß die "möglichen Welten" $(W, \lambda^{(\nu)})_S$ streuungsfreie Zustände des Systems S darstellen, in denen jede Aussage A über S determiniert ist, d.h. für jedes A und für jedes ν gilt:

$$\Delta_{(W, \lambda^{(\nu)})_S} A \quad \text{oder} \quad \Delta_{(W, \lambda^{(\nu)})_S} \neg A .$$

Die "<u>wirkliche Situation</u>" des Systems S sei gegeben durch (W^W, λ^W).

<u>Def.</u>: $\mathcal{W}_S := \{(W_\rho, \lambda^{(\nu)})_S \mid \nu \in I, \rho \in J\}$ (mit gewissen Indexmengen I und J) sei die Menge aller "möglichen Welten" des Systems S.

Ferner sei

<u>Def.</u>: $\mathcal{MO}_S^{(W)} := \{(W_\varrho, \lambda^{(\nu)})_S \in \mathcal{MO}_S \mid W_\varrho = W\}$

die Menge aller "möglichen Welten" von S, die zum gleichen Zustand W gehören.

Dies führt zur

<u>Inneren Semantik der Notwendigkeit</u>

A ist notwendig in $(W^W, \lambda^W)_S$

$$\overset{\curvearrowleft}{\text{Int.}} \quad \bigwedge_{(W_\varrho, \lambda^{(\nu)})_S \in \mathcal{MO}_S} (W^W, \lambda^{(\nu)})_S \vdash_{D_m} A$$

d.h. A ist notwendig in der "wirklichen Situation" $(W^W, \lambda^W)_S$ des Systems S genau dann, wenn in jeder "möglichen Welt" $(W^W, \lambda^{(\nu)})_S$, die den gleichen Zustand W^W wie die "wirkliche Situation" beschreibt. der Proponent in einem materiellen Dialog um A eine Gewinnstrategie hat, also A wahr ist.

Führt man noch die Äquivalenzrelation $\approx$ auf $\mathcal{MO}_S$, definiert durch

$$(W_\varrho, \lambda^{(\nu)})_S \approx (W_\sigma, \lambda^{(\mu)})_S \quad \curvearrowright \quad W_\varrho = W_\sigma$$

ein, so läßt sich die innere Semantik der Notwendigkeit und analog die der Möglichkeit wie folgt darstellen:

A ist notwendig in $(W^W, \lambda^W)_S$

$$\overset{\curvearrowleft}{\text{Int.}} \quad \bigwedge_{(W_\varrho, \lambda^{(\nu)})_S \in \mathcal{MO}_S} ((W_\varrho, \lambda^{(\nu)})_S \approx (W^W, \lambda^W)_S \curvearrowright (W_\varrho, \lambda^{(\nu)})_S \vdash_{D_m} A)$$

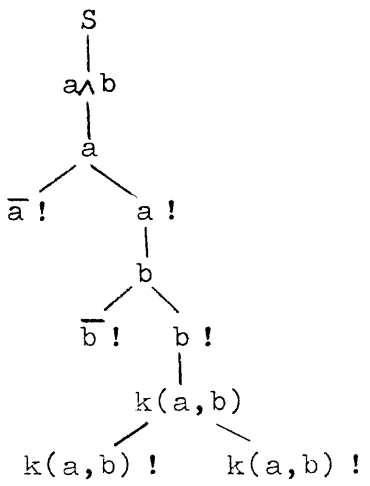
A ist möglich in $(W^W, \lambda^W)_S$

$$\overset{\curvearrowleft}{\text{Int.}} \quad \bigvee_{(W_\varrho, \lambda^{(\nu)})_S \in \mathcal{MO}_S} ((W_\varrho, \lambda^{(\nu)})_S \approx (W^W, \lambda^W)_S \curvearrowright (W_\varrho, \lambda^{(\nu)})_S \vdash_{D_m} A)$$

Man erkennt, daß bei dieser Interpretation die Parameter $\lambda^{(\nu)}$ die Rolle der Systeme S^i bei der äußeren Semantik übernommen haben; während die "möglichen Welten" des Systems S mit der Präparation W dort durch ein Ensemble $\{S^i(W)\}$ repräsentiert wurden, geschieht dies jetzt durch die Parameter $\lambda^{(\nu)}$ in Verbindung mit W.

Bei der obigen Definition der Modalitäten und ihren Interpretationen durch die äußere bzw. innere Semantik wurde Bezug genommen auf den materiellen Dialog D_m, der den Rahmen des Beweises für eine Aussage A bildet; man spricht daher auch von der <u>Beweisprozeß-Semantik</u> der Modalitäten.

Nach Stachow [24] "hypostasieren die Beweisprozesse die Elemente und weitergehend die Strukturen physikalischer Realität"; er schlägt daher neben der Beweisprozeß-Semantik eine zu dieser äquivalente <u>Real-Semantik</u> vor, in der die möglichen materiellen Beweisprozesse in einem Dialog um eine Aussage A anschaulich als Zweige in einem Spielbaum dastellbar sind, z.B.



Ein individueller Dialog um $a \wedge b$ an S wird durch eine Folge von Testergebnissen, z.B. $\langle a!, b!, k(a,b)! \rangle$ bestimmt, der eine Folge von Eigenschaften des physikalischen Systems S entspricht.

<u>Definitionen</u>:

(a) Die Menge der Folgen von Eigenschaften, die zu erfolgreichen Dialogzweigen im Spiel um A gehören, werde mit P(A) bezeichnet; z.B. ist $P(a \wedge b) = \langle E_a, E_b, E_{k(a,b)} \rangle$.

(b) $S \vdash p$ ist eine Abkürzung für die Feststellung "Es liegt ein <u>materieller Prozeß</u> p (entsprechend einem Zweig im Spielbaum) bzgl. des Systems S vor".
$P = \{p\}$ sei die Menge aller materiellen Prozesse.

(c) Die Aussage A ist <u>wahr bzgl. S</u>
$:\Leftrightarrow \quad S \vdash p \quad$ und $\quad p \in P(A)$

(d) p_o sei der materielle Prozeß, der die "Vorgeschichte", d.h. die Präparation des Systems beschreibt; p_o stellt also den <u>Zustand</u> des Systems S dar.

$P_o = \{p_o\}$ sei die Menge aller Zustände von S.

(e) Die Operation ψ ist definiert durch

$$\psi : P' \subseteq P_o \times P \longrightarrow P_o \text{ mit}$$
$$(p_o, p) = (\langle E_a, \ldots, E_f \rangle, \langle E_g, \ldots, E_k \rangle)$$
$$\longrightarrow \langle E_a, \ldots, E_f, E_g, \ldots, E_k \rangle$$

(f) Sei A eine Aussage über S; die <u>"Nachfolge"-Relation</u> N_A auf P_o ist definiert durch

$q_o N_A p_o$ ("q_o ist Nachfolger von p_o")

$:\Leftrightarrow \quad \exists\, p \in P(A) \cup P(\neg A) : q_o = p_o \psi p$

Dies führt zur folgenden

<u>Real-Semantik der Modalitäten</u>

A ist notwendig bzgl. p_o $\Leftrightarrow$	$p_o \vdash p$ und $\forall p' \in P : (p_o \psi p' N_A p_o \Rightarrow p' \in P(A))$
A ist möglich bzgl. p_o $\Leftrightarrow$	$p_o \vdash p$ und $\exists p' \in P : (p_o \psi p' N_A p_o$ und $p' \in P(A))$

Die Aussage A über das System S ist also notwendig bzgl. des Zustands p_o von S genau dann, wenn es materielle Prozesse p bzgl. p_o gibt und jeder Nachfolger $p_o \psi p'$ von p_o zur Menge der Eigenschaftsfolgen $\langle E_a, \ldots, E_i \rangle$ gehört, denen erfolgreiche Dialogzweige im Spielbaum entsprechen.

3. Hilbertraum-Darstellung der Modalitäten

Die Aussagen A über ein quantenmechanisches System S werden im zugehörigen Hilbertraum $\mathcal{H}(S)$ durch Unterräume M_A bzw. durch Projektionsoperatoren P_A (auf M_A) wiedergegeben.
Sei also W ein Wissen über S, das in $\mathcal{H}(S)$ durch M_W bzw. P_W dargestellt werde. Dann ist A notwendig relativ zu W (bzw. in S(W)), falls M_W ein Teilraum von M_A ist [16, p.492]:

$$\Delta_W A \quad \leftrightarrow \quad M_W \subseteq M_A$$

bzw.

$$\Delta_W A \quad \leftrightarrow \quad P_W \leq P_A$$

$$\leftrightarrow \quad P_W = P_W P_A$$

$$\leftrightarrow \quad P_W = P_A P_W P_A$$

Die letzte Äquivalenz gilt, da A und W wegen $P_W = P_W P_A$ kommensurabel sind.

Die Möglichkeit ist definiert durch

$$\nabla_W A \quad \leftrightarrow \quad \neg \Delta_W \neg A$$

Da aber der zur Aussage $\neg A$ gehörige Projektionsoperator $1-P_A$ ist, gilt:

$$\nabla_W A \quad \leftrightarrow \quad \neg P_W = P_W P_{\neg A}$$

$$\leftrightarrow \quad \neg P_W = P_W(1-P_A)$$

$$\leftrightarrow \quad P_W P_A \neq 0$$

Wir werden später (III.3) die Möglichkeit bei Mittelstaedt für reine Zustände $W = \phi$ mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation näher betrachten, um sie mit der Möglichkeit bei Dalla Chiara vergleichen zu können.

Weitere Modalitäten und ihre Hilbertraum-Darstellung findet man bei Mittelstaedt [16].

II. Modale Interpretation der Quantenmechanik bei B.C.van Fraassen

1. Warum und wozu eine modale Interpretation ?

Zwischen 1972 und 1976 erläuterte B.C.van Fraassen in drei Arbeiten ([1], [2], [3]) seine "modale Interpretation der Quantenmechanik", die man vielleicht besser als "Versuch einer modalen Formulierung des quantenmechanischen Meßprozesses" bezeichnen sollte. Ausgangspunkt der van Fraassenschen Überlegungen sind Inkonsistenzen, die sich angeblich ergeben, wenn man folgende Postulate gemeinsam zur Erklärung des quantenmechanischen Meßprozesses benutzt (vgl. [3, pp.284] oder [10, pp.334]):

CP (Kompositionspostulat):

Das aus den Systemen X und Y zusammengesetzte System X+Y ist im Zustand $\varphi\otimes\psi$ genau dann, wenn vor einer Zusammensetzung der Systeme X im reinen Zustand φ und Y im reinen Zustand ψ ist.

EP (Entwicklungspostulat):

Der Zustand φ eines isolierten Systems mit der Hamiltonfunktion H entwickelt sich zeitlich in der Form $\varphi(t)= e^{-iHt}\varphi(t_o)=:U(t)\varphi(t_o)$.

PP (Projektionspostulat):

Wird an einem System im (normierten) Zustand θ eine Messung einer Observablen A, d.h. eine A-Messung, ausgeführt, und ist $\theta=\sum d_i\alpha_i$, wobei $\{\alpha_i\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren des zu A gehörigen Operators ist, so geht das System mit der Wahrscheinlichkeit d_i^2 in den Zustand α_i über.

RP (Reduktionspostulat):

Ist das zusammengesetzte System X+Y im Zustand $\phi=\sum e_i\varphi_i\otimes\psi_i$, dann kann X beschrieben werden durch den Dichteoperator $\rho_1=\sum e_i^2\mathcal{P}_{[\varphi_i]}$ und Y durch $\rho_2=\sum e_i^2\mathcal{P}_{[\psi_i]}$.

IP (Nichtwissen-Postulat, "ignorance postulate")

Ein System, beschreiben durch den Dichteoperator ρ, befindet sich tatsächlich in einem reinen (Eigen-)Zustand (von ρ).

BP (Bohrsches Postulat):

a) Das System X sei im Zustand $\varphi=\sum c_i\alpha_i$, wobei $\{\alpha_i\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren des zu einer Observablen gehörigen Operators ist. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Messung an X den Wert a_i (Eigenwert zum Eigenverktor α_i) ergibt, gleich c_i^2 (falls A entartet ist: $\sum_{a_j=a_i} c_j^2$).

b) Ist das System X im Zustand ρ, so ist der Erwartungswert bei einer A-Messung an X gleich $Sp(\rho A)$.

Zunächst führt die Benutzung von IP auf folgende Schwierigkeit (vgl. [1,pp.330] oder [10,p.345]): Da ein Dichteoperator ρ i.a. durch mehrere Systeme von Eigenvektoren bzw. durch die zugehörigen Projektionsoperatoren beschrieben werden kann, also etwa

$$\rho = \Sigma c_i^2 P_{[\psi_i]} = \Sigma c_i'^2 P_{[\psi_i']}$$

gilt, wäre nach IP das fragliche System tatsächlich gleichzeitig in zwei verschiedenen reinen Zuständen! Frau Dalla Chiara wies aber darauf hin [10,p.345], daß dieses Paradoxon bei Benutzung von Quantenlogik verschwindet.

Ein anderes Problem ist das "von Neumannsche Paradoxon des Meßprozesses". Einerseits wird der Zustand des zusammengesetzten Systems Objektsystem X + Meßgerät Y bei einer A-Messung nach der 'Aufnahme' beschrieben durch

$$\Psi(t) = \Sigma c_i \alpha_i \otimes \varphi_i \qquad (1),$$

wobei $\{\alpha_i\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren des zu A gehörigen Operators mit zugehörigen Eigenwerten a_i ist und φ_i die Zustände des Meßgeräts sind, die die a_i anzeigen. Diese Summe kann nicht als einfaches Tensorprodukt $\psi_k \otimes \varphi_k$ dargestellt werden (vgl. [11,p.110]). Andererseits erhält man u.a. mit Hilfe von PP nach der Messung (also nach Ausführung des 'Schnitts'! Vgl. [11,pp.112]) das Resultat: X ist in einem Zustand ψ_k und Y in einem Zustand φ_k, also ist nach CP das Gesamtsystem X+Y im Zustand $\psi_k \otimes \varphi_k$. Geht man davon aus, daß beim Schnitt "nicht passiert" - worauf ich in §3. zurückkommen werde! -, so ist

$$\Psi(t) = \psi_k \otimes \varphi_k \qquad (2),$$

im Widerspruch zu (1)!

Aus diesen und anderen Gründen (z.B. [3,p.291]: "PP also implies the caus anomalies explained by Schrödinger"(!?)) kommt van Fraassen zu der Auffassung, daß PP und IP abzulehnen sind. Man hat dabei in Kauf zu nehmen, daß Meßergebnisse nicht mehr als Aussagen über tatsächlich vorliegende Zustände eines Systems gedeutet werden können: "Die Observable A hat de Wert a" heißt jetzt eben nicht mehr, daß das System in dem zu a gehörige Eigenzustand ist! Zitat [3,p.291]: "But then we can no longer interpret measurement reports as attributions of states. Indeed, we can then only say that, at the end of a measurement, apparartus and system alike are in mixed states; the statement 'the apparatus shows value a' has at this point no interpretation."

Folglich müssen Meßergebnisse anders interpretiert werden, was in der Weise geschehen soll, daß diese "modale Interpretation" die bisherige Funktion von PP und IP übernimmt. Zitat [3,p.291]: "I now accept the postultes called composition, evolution, reduction, and Born, with no restrictions on their scope; reject projection and ignorance; and

develop an interpretation according to which the phenomena are as if projection and ignorance were true."

Hierzu wird eine formale Sprache $\mathcal{ML}_2$ (als Vorstufe eine Sprache $\mathcal{ML}_1$ konstruiert, die sich schon in ihrer modalen Syntax wesentlich von den üblicherweise benutzten Sprachen unterscheidet: Neben einer (hie unwesentlichen) Benutzung von "syntaktischen Funktionen" zur Konstru tion der Formeln tritt als entscheidendes Merkmal eine Unterteilung der elementaren (quantenlogischen) Sätze in zwei disjunkte Mengen L_1 $\{(m,E)\}$ und $L_2=\{\langle m,E\rangle\}$ auf, wobei m eine Observable und E eine Borel-Menge ist. (m,E) heißt "Zustandszuordnung" ("state attribution"), $\langle m,E\rangle$ "Wertzuordnung" ("value attribution").

Die Semantik basiert auf dem Begriff "Aussage eines Satzes", d.i. eine Menge gewisser Objekte, die der "möglichen Welten" - in der zu konstr ierenden Sprache der Quantenmechanik sind dies Paare von Dichteopera toren -, die einem Satz mittels einer "Aussagenfunktion" zugeordnet werden. Ein Satz E heißt dann 'wahr in der Welt α', wenn α in der zum Satz gehörigen Aussage $|E|$ liegt. Bei der Festlegung der Aussagen für die elementaren quantenlogischen Sätze (m,E) und $\langle m,E\rangle$ hat man nun folgendes zu beachten:

a) Bekanntlich liefert die Theorie, d.h. die Quantenmechanik, u.a. Behau tungen der Form "Bei einer m-Messung am System X im Zustand ρ li der Meßwert M mit Sicherheit in der Borel-Menge E.", z.B. wenn das das System X in einem Eigenzustand von m vorliegt. Im Formalismus der Theorie wird dies ausgedrückt durch

$$P_m^{\rho}(E) := \sum_{\Lambda\in E} Sp(\rho\, Pr_\Lambda) = 1 \qquad (3),$$

wobei Pr_Λ der Projektionsoperator auf den zum Eigenwert Λ von m gehörigen Unterraum ist. (m,E) soll nun gerade dann wahr sein, wen (3) gilt.

b) Experimentelle Meßergebnisse liefern Behauptungen der Form "Bei einer m-Messung am System X im Zustand ρ liegt der Meßwert M (fak tisch) in der Borel-Menge E.". Nach dem Kopenhagener Postulat (vgl [2, pp.102] oder [3, p.292]) ist dies der Fall, falls es einen reinen Zustand β in einer Zerlegung des Gemischs ρ gibt, so daß bei einer m-Messung am System in diesem Zustand β der Meßwert mit Sicherhei in der Borel-Menge E liegt. Demnach hat man bei der Feststellung der 'Wahrheit' von Meßergebnissen im Formalismus neben ρ einen we teren Parameter β zu berücksichtigen; man betrachtet also Paare $\langle\rho,\beta\rangle$. $\langle m,E\rangle$ soll nun gerade ein Meßergebnis ausdrücken, also wahr sein in der Welt $\langle\rho,\beta\rangle$', falls $P_m^{\beta}(E)=1$ mit $\beta\in U_\rho$, wobei U_ρ die Men der (reinen) Zustände β ist, die in einer Zerlegung von ρ vorkommen

Legt man diese Wahrheitsbegriffe für (m,E) und $\langle m,E\rangle$ zugrunde und berücksichtigt man die übliche Semantik für den Notwendigkeitsfunktor $\Box$ mit einer "Erreichbarkeitsrelation", so kann man zeigen:

$$|(m,E)| = |\Box\langle m,E\rangle|,$$

wodurch es gerechtfertigt erscheint, (m,E) als 'notwendig' zu bezeichnen.

Der Meßprozess läßt sich nun wie folgt darstellen: Wie bereits erwähnt befindet sich das System Objektsystem X + Meßgerät Y bei einer A-Messung nach der Aufnahme im Zustand $\sum c_i \alpha_i \otimes \varphi_i$. Also liegt nach RP X als Gemisch $\rho_1 = \sum c_i^2 \mathcal{P}_{[\alpha_i]}$ und Y als Gemisch $\rho_2 = \sum c_i^2 \mathcal{P}_{[\varphi_i]}$ vor. Nach BP ist demnach die Wahrscheinlichkeit, daß eine Messung von A den Wert a_j ergibt, also $\langle A, \{a_j\}\rangle$ wahr ist, gleich c_j^2; $(A, \{a_k\})$ dagegen wäre nur wahr, falls das zugehörige $c_k = 1$ wäre! Die Bornschen Wahrscheinlichkeiten c_j^2 werden also hier weder als Wahrscheinlichkeiten für den Übergang zwischen Zuständen (vgl. PP), noch als Wahrscheinlichkeiten für das Wissen des 'realen' Zustandes (vgl. IP), sondern als Wahrscheinlichkeiten für das Wissen über den tatsächlich vorliegenden Wert ("ignorance-of-actual value probability") interpretiert; sie können - wie üblich - durch eine Bestimmung von Häufigkeiten der Meßwerte getestet werden.

2. Aufbau einer modalen Sprache der Quantenmechanik

A) Syntax

(2.1) Def.: Die Syntax einer Sprache besteht aus

(a) einer Menge V (dem "Vokabular")

(b) einer Menge F von Funktionen $\phi^{(n)}: V^n \to \mathcal{F}$ ($n \in \mathbb{N}$) (den "syntaktischen Fktn."), wobei $\mathcal{F}$ die Menge der aus Elementen von V gebildeten Zeichenreihen ist (d.i. die Menge der "Formeln")

(c) einer Definition (der "Grammatik"), die festlegt, welch Formeln "Funktoren" und welche "Sätze" heißen sollen.

(2.2) Beispiel: Die Syntax der modalen Sprache $\mathcal{ML}$:

(a) Seien $S_e := \{a, b, c, \ldots\}$ und $S_1 := \{\Box, \&, \to, <, \neg\}$ zwei Mengen (die "elementaren Sätze" und die "logischen Zeichen"); sei $V := S_e \cup S_1$ das Vokabular.

(b) Die syntaktischen Funktionen seien $\phi^{(n)}: V^n \to \mathcal{F}$ mit $(e_1, \ldots, e_n) \to e_1 e_2 \ldots e_n$.

(c) Def.: (i) $e = \phi^{(1)}(e)$ mit $e \in S_1$ heißt "(konnektiver) Funktor"

(ii) Die Menge der Sätze sei wie folgt rekursiv defini

α) $e = \phi^{(1)}(e)$ mit $e \in S_e$ ist Satz (Diese Sätze solle auch "elementare Sätze" genannt werden.)

β) Seien A, B Sätze; dann sind auch $\Box A, A\&B, A \to B, A < B, A \neg B$ Sätze.

B) Semantik

(2.3) Def.: Die Semantik einer Sprache wird geliefert durch eine "Modellstruktur" $M = \langle K, \overline{R} \rangle$, wobei K eine Menge (die der "möglichen Welten") und $\overline{R}$ eine Menge von Relationen ist, die eine Funktion

$$\Phi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{P}(K)$$
$$E \longrightarrow \Phi(E) = |E|$$

(die "Aussagenfunktion") enthält.

(2.4) Def.: Sei $\alpha \in K$ und E ein Satz.

(i) E heißt "wahr in (der Welt) α" $:\Leftrightarrow \alpha \in |E|$

(ii) $|E| \subseteq K$ heißt "Aussage (des Satzes E)"

(2.5) <u>Beispiele</u>: (a) Der Rahmen für eine Semantik SE_1 der modalen Sprache $\mathcal{ML}_1$:

Sei $K=\{\alpha,\beta,\gamma,\ldots\}$ eine Menge, $\overline{R}$ eine Menge von Relationen, die eine Relation $R\subseteq K\times K$ (die "<u>Erreichbarkeits-Relation</u>"), eine Funkt $f:K\times\mathcal{P}(K)\to K$ (die "<u>Stalnaker-Fkt.</u>") und die Aussagenfkt. Φ enthä deren Werte wie folgt rekursiv definiert seien:

(i) $|e|$ sei für elementare Sätze $e=\phi^{1)}(e)$ bereits festgelegt.

(ii) Seien A,B Sätze und $|A|,|B|$ bereits bekannt; dann ist

$$|\Box A| = \{\alpha \mid \beta\in|A| \ \forall\beta \ni \alpha R\beta\} =: \Box|A|$$
$$|A\&B| = |A|\cap|B|$$
$$|A\to B| = (K-|A|)\cup|B|$$
$$|A<B| = \{\alpha \mid f(\alpha,|A|)\in|B|\}$$
$$|A\Rightarrow B| = \{\alpha \mid \{\beta\in|A| \mid \alpha R\beta\}\subseteq\{\beta\in|B| \mid \alpha R\beta\}\}$$

(iii) Für Formeln E, die keine Sätze sind, sei $\Phi(E)=\emptyset$

(b) Der Rahmen für eine Semantik SE_2 der modalen Sprache $\mathcal{ML}_2$: Wie in (a), aber statt K jetzt $K_L:=K\times L=\{\langle\alpha_1,\lambda_1\rangle,\langle\alpha_2,\lambda_2\rangle,\ldots\}$ mit zwei Mengen K,L. (Man beachte, daß evtl. $\alpha_i=\alpha_j$ oder $\lambda_i=\lambda_j$ für gewisse $i,j\in\mathbb{N}$.)

Ferner statt R jetzt $R^*\subseteq K_L\times K_L$

(2.6) <u>Def.</u>: Sei A ein Satz von $\mathcal{ML}_1$.

Die Aussage $|A|$ heißt "<u>notwendig</u>" $:\Leftrightarrow |\Box A|=|A|$

(2.7) <u>Folgerung</u>: $|A|$ ist eine notwendige Aussage $\Leftrightarrow$
$(\{\beta \mid \alpha R\beta\}\subseteq|A| \Leftrightarrow \alpha\in|A|)$

(2.8) <u>Bemerkung</u>:

(i) Man unterscheide:

α) die Aussage "notwendig A" $(=|\Box A|=\Box|A|)$

β) die metasprachliche Feststellung "$|A|$ ist eine notwendige Aussage" (d.h. $\Box|A|=|A|$)

(ii) Um neben dem Begriff "notwendige Aussage" auch den Begri "faktische Aussage" einführen zu können, wir die Semantik SE_1 zur Semantik SE_2 erweitert.

C) Quantenlogische Aussagen

(2.9) <u>Def.</u>: Sei $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Menge der Borel-Mengen von $\mathbb{R}$, $\mathcal{H}$ ein Hilbe Raum und $H(\mathcal{H})$ (bzw. $N(\mathcal{H})$) die Menge der hermit. (bzw. de Dichte-) Operatoren auf $\mathcal{H}$.
Sei $\alpha \in N(\mathcal{H})$ und $m \in H(\mathcal{H})$; sei $\{\Lambda\}$ die Menge der EWe vo und $\{\mathcal{P}_{\mathfrak{V}_\Lambda}\}$ die der Projektionsoperatoren auf die zu Λ ge hörigen Eigenräume $\mathfrak{V}_\Lambda$. Dann ist die Fkt. P_m^α definiert durch

$$P_m^\alpha : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$$
$$E \longrightarrow P_m^\alpha(E) = \sum_{\Lambda \in E} Sp(\alpha \cdot \mathcal{P}_{\mathfrak{V}_\Lambda})$$

(2.10) <u>Bemerkung</u>: Als Sprache der Quantenmechanik soll die modale Spra $\mathcal{ML}_2$ dienen, deren Syntax und Semantik noch nicht vollstän präzisiert wurde. Dies soll jetzt schrittweise geschehen.

(2.11) <u>Def.</u>: (i) Sei $K := N(\mathcal{H})$ (der "<u>Zustandsraum</u>") und $L := \{\beta \in N(\mathcal{H}) | \beta^2 = \beta$ (der "<u>Raum der reinen Zustände</u>").
Die Paare $\langle \alpha, \lambda \rangle \in K_L = K \times L$ heißen "<u>Modelle</u>"

(ii) Die Relation $R \subseteq K \times K$ sei definiert durch: $\alpha R \beta \;:\Leftrightarrow$
$\exists\, c \in (0,1]\ \exists\, \gamma \in K\ \forall m \in H(\mathcal{H})\ \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$P_m^\alpha(E) = c P_m^\beta(E) + (1-c) P_m^\gamma(E)$$

Sie ist die "<u>Erreichbarkeits-Rel.</u>" der Sprache $\mathcal{ML}_1$.

(iii) $U_\alpha := \{\beta \in K | \alpha R \beta$ und $\beta^2 = \beta\}$

(iv) Die "Erreichbarkeits-Relation" $R^* \subseteq K_L \times K_L$ der Sprache $\mathcal{ML}_2$ ist definiert durch:
$\langle \alpha, \lambda \rangle R^* \langle \beta, \lambda' \rangle \;:\Leftrightarrow (\alpha R \beta$ und $\beta^2 = \beta = \lambda'$ und $\lambda \in U_\alpha)$

(2.12) <u>Def.</u>: (i) Sei $m \in N(\mathcal{H})$ und $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$; dann heißen (m,E) und $\langle m,E \rangle$ "<u>elementare quantenlogische Sätze</u>", $|(m,E)|$ und $|\langle m,E$ "<u>elementare quantenlogische Aussagen</u>".

(ii) (α) Die Menge $L_1 := \{(m,E) | m \in H(\mathcal{H}), E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ ist die Men S_e der Sprache $\mathcal{ML}_1$.
(β) Die Aussagenfunktion Φ der Sprache $\mathcal{ML}_1$ ist fes gelegt durch (vgl. (2.5)(a)(i)!):

$$|(m,E)| = \{\alpha \in N(\mathcal{H}) | P_m^\alpha(E) = 1\}$$

(iii) Sei $L_2 := \{\langle m,E \rangle | m \in H(\mathcal{H}), E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$; die Menge $L_1 \cup L_2$ ist die Menge S_e der Sprache $\mathcal{ML}_2$.

(2.13) <u>Satz</u>: In der Sprache $\mathcal{ML}_1$ sind die elementaren quantenlogische Aussagen $|(m,E)|$ notwendige Aussagen.

(2.14) <u>Bemerkung</u>: Gemäß (2.3)(a)(i) sind für die Sprache $\mathcal{ML}_2$ noch di Werte $|(m,E)|$ bzw. $|\langle m,E\rangle|$ der Aussagenfkt. Φ für elementare Sä $(m,E)=\Phi^{(1)}((m,E))$ bzw. $\langle m,E\rangle=\Phi^{(1)}(\langle m,E\rangle)$ festzulegen, wodurch n (2.2)(i) zugleich festgelegt ist, wann eine elementare quantenl Aussage $|(m,E)|$ bzw. $|\langle m,E\rangle|$ (und damit nach (2.3)(a)(ii) eine beliebige Aussage $|A|$ der Sprache $\mathcal{ML}_2$) "wahr" sein soll.

(2.15) <u>Def.</u>: Für die Aussagenfkt. Φ der Sprache $\mathcal{ML}_2$ sei... zunächst fü die elementaren Sätze (m.E) definiert:

$$\Phi((m,E)) = |(m,E)| = \{\langle\alpha,\lambda\rangle\in K_L \mid P_m^{\alpha}(E)=1\}$$

Nach (2.2)(i) ist also (unabh. von λ):

$$(m,E) \text{ wahr in } \langle\alpha,\lambda\rangle \Leftrightarrow P_m^{\alpha}(E)=1$$

(2.16) <u>Postulat</u> (Kopenhagen):

$$\langle m,E\rangle \text{ ist wahr in } \langle\rho,\beta\rangle\in K_L \Leftrightarrow \beta\in U_\rho \text{ und } P_m^{\beta}(E)=1$$

(2.17) <u>Folgerung</u>:

$$|\langle m,E\rangle| = \{\langle\rho,\beta\rangle\in K_L \mid \langle m,E\rangle \text{ wahr in } \langle\rho,\beta\rangle\}$$
$$= \{\langle\rho,\beta\rangle\in K_L \mid \rho R\beta \text{ und } P_m^{\beta}(E)=1\}$$

(2.18) <u>Satz</u>: $|(m,E)| = |\Box\langle m,E\rangle|$

Die obige Zusammenfassung über "quantenlogische Aussagen" folgt der Darstellung in [2]. In einer späteren Arbeit [3] wurde zunächst auf die Benutzung von Modellen $\langle\alpha,\lambda\rangle$ verzichtet und die "Kopenhagener Postulat" wie folgt eingeführt:

Wir betrachten den Zustandsoperator eines Gemischs, also $\rho = \Sigma c_i P_{\phi_i}$. Alle ϕ_i, die in einer solchen (nicht eindeutigen) Darstellung von von ρ vorkommen, heißen "möglich$_1$ relativ zu ρ" [3, p.286]; ihre Gesamtheit ist die Menge U_ρ (vgl. 2.11.iii). Die Aussage $\langle m,E\rangle$, daß also die Observable m "actually" einen Wert in der Borel-Menge E hat, ist wahr genau dann, wenn es einen Zustand β in U_ρ gibt mit $P_m^\beta = 1$. D.h.: Wenn sich das System im Zustand β befindet (etwa nach einer Messung), so liefert eine weitere Messung mit Sicherheit einen Wert in E; dies ist gerade der Inhalt von (2.16).

(An dieser Stelle sei auf einen sprachlichen Mißgriff in [3] aufmerksam gemacht: Dort wird ein λ aus U_ρ als "possible relative to ρ" bezeichnet, was ich oben mir "möglich$_1$ relativ zu ρ" übersetzt habe; mit einem solchen λ wird dann ein Paar $\langle\alpha,\lambda\rangle$ gebildet [3, p.295], was als "Modell einer möglichen Situation" bezeichnet wird. In [2] werden zwar ähnliche Modelle betrachtet (λ ist auch wieder ein reiner Zustand $\in U_\rho$; vgl. [2, p.103 (19)]), jedoch ist - man vgl. 2.11 - die (Erreichbarkeits-)Relation "möglich relativ zu" wie in der Modallogik üblich zwischen zwei Modellen bzw. zwischen zwei "physikalischen Situationen" - in der Modallogik "mögliche Welten genannt - erklärt.)

Die Einführung eines Parameters λ neben dem Zustand α zur Beschreibung der "physikalischen Situation" wird bei van Fraassen mit folgenden Worten begründet:

[2, p.101]: "...an actual situation cannot be modelled by a state alone, since presumably what is true depends exactly on the actual situation. So I shall introduce an extra factor, a parameter λ ..."

[3, p.295]: "Consider first a single system X in state ρ. To say it is in this state is to describe the situation only partly; it tells us which of the statements (m,E) is true. To know in addition which statements $\langle m,E\rangle$ are true, we want a second factor, λ; this will be a pure state in U_ρ ..."

Der Parameter λ ergänzt also die Information des Gemischs ρ "bis auf einen reinen Zustand"; dieser dient allerdings nicht zur Beschreibung der Dynamik des Systems, für die allein ρ zuständig ist. ρ wird also durch λ nicht ersetzt.

Im Rahmen der Ignorance-Interpretation des Gemischs würde man sagen, daß λ zur Behebung des in ρ enthaltenen subjektiven Unwissens dient. Da van Fraassen aber die Ignorance-Interpretation ablehnt (vgl. Kap. 1), wird eine solche Formulierung dem Autor nicht gerecht; für ihn ist der Zustandsoperator, der ein Gemisch beschreibt, ebenso eine "Basisgröße" wie der einen reinen Zustand beschreibende Vektor im Hilbertraum [18, p.7].

Später hat van Fraassen drei verschiedene Interpretationen des quantenmechanischen Zustands bzgl. der in ihm enthaltenen Information wie folgt gegeneinander abgegrenzt [18, p.4/5]:

(A) "von-Neumann-Interpretation":
Der Zustandsoperator beinhaltet die vollständige ("complete") Information über das System.

(B) "Kopenhagener Interpretation":
a) Falls der Zustandsoperator einen reinen Zustand beschreibt, so liefert er eine vollständige Information über das System.
b) Falls der Zustandsoperator ein Gemisch beschreibt, so ist die Information über das System unvollständig.

(C) "Anti-Kopenhagener Interpretation":
Kein Zustandsoperator liefert eine vollständige Information über das System.

In der Terminologie von Mittelstaedt [20, p.18] bedeutet hierbei "vollständige Information" ein maximales Wissen, nicht aber ein perfektes.

Die "modale Interpretation der Quantenmechanik" von van Fraassen dient dazu, die in der vom Autor favorisierten Kopenhagener Interpretation im Fall des Gemischs vorliegende Unvollständigkeit der Information abzubauen bei gleichzeitiger Ablehnung der Ignorance-Interpretation. Van Fraassen betont [2, p.105], daß die Benutzung von Modellen $\langle \rho, \lambda \rangle$ keine Verborgene-Parameter-Theorie im Sinne von v. Neumann, Kochen-Specker, Jauch-Piron oder Bohm-Bub ist, wenngleich gewisse Beziehungen zu diesen bestehen.

Die Benutzung der "Kopenhagener Interpretation" und des "Kopenhagener Postulats" wird von van Fraassen "Kopenhagener Variante" (oder auch "Copenhagen Modal Variant" = CMI) genannt.
Das Kopenhagener Postulat (2.16) lautet im Fall des reinen Zustands ($U_\alpha = [\alpha]$!):

$$\langle m,E\rangle \text{ ist wahr in } (\alpha,\lambda) \;\curvearrowleft\; \lambda = \alpha \text{ und } P_m^\lambda(E) = 1$$
$$\curvearrowleft\; P_m^\alpha(E) = 1$$
$$\curvearrowleft\; (m,E) \text{ ist wahr in } (\alpha,\lambda)$$

d.h.: Neben den wahren quantenlogischen Aussagen (m,E) gibt es keine weiteren (anderen) wahren Aussagen $\langle m',E'\rangle$.
Dies besagt gerade die Vollständigkeit der Information durch α, wie es in der Kopenhagener Interpretation verlangt wird.
Im Fall, daß α ein Gemisch darstellt, ist nur mehr

$$(m,E) \text{ wahr in } (\alpha,\lambda) \;\curvearrowright\; \langle m,E\rangle \text{ wahr in } (\alpha,\lambda)$$

zutreffend, d.h.:

Neben den wahren quantenlogischen Aussagen (m,E) gibt es evtl. weitere wahre Aussagen $\langle m',E'\rangle$, ohne daß (m',E') wahr ist.

In Übereinstimmung mit der Kopenhagener Interpretation können also im Fall des Gemischs Aussagen über das System wahr sein aufgrund eines Parameters λ, der zum Zustand α lediglich in einer gewissen Relation steht.

3. Modalitäten und "value states"

In jüngster Zeit ([18], [19]) bevorzugt van Fraassen einen weniger formal-sprachlichen und mehr algebraischen Zugang zur Interpretation der Quantenmechanik.

Statt der "Modelle" $\langle\alpha,\lambda\rangle$ (vgl.2.11) werden nun "physikalische Situationen" $\omega=(\alpha,\lambda)$ betrachtet, wobei α ein Zustandsoperator und λ eine Funktion ist, die jeder Observablen eine Borel-Menge $\neq\emptyset$ zuordnet. Der "dynamical state" α dient - wie in der Quantenmechanik üblich - zur Beschreibung der Dynamik des Systems; insbesondere können im Rahmen der Quantenmechanik auf der Grundlage des Zustands α statistische Vorhersagen über zukünftige Meßresultate gemacht werden. λ dagegen soll eine Beschreibung von Meßergebnissen gestatten (vgl.oben unter 1.b), was durch α i.a. nicht exakt, sondern nur in Form einer Wahrscheinlichkeitsaussage möglich ist. Umgekehrt enthält λ - auch "verborgener Parameter" bzw. "value state" genannt - aber nicht die Information aus α, auf Grund derer Vorhersagen gemacht werden können. Schließlich müssen α und λ insofern verträglich sein, als die durch λ gelieferte Information der von α nicht widersprechen darf.

Für zwei physikalische Situationen $\omega=(\alpha,\lambda)$ und $\omega'=(\beta,\mu)$ definiert man:

$\omega\tilde{R}\omega'$ $:\Leftrightarrow$ ω' ist möglich relativ zu ω

$:\Leftrightarrow$ $(\omega\in q \Rightarrow \omega'\in q)\ \forall q\in\mathbb{P}$

Man kann zeigen [18, p.19/20]:

$\omega\tilde{R}\omega'$ $\Leftrightarrow$ $\alpha R\beta$ (vgl.2.11.ii)

$\Leftrightarrow$ α ist ein Gemisch aus β und einem gewissen weiteren Zustand γ $(\alpha=c\beta+(1-c)\gamma)$

Wie in Kap.1 dargestellt, werden zwei Arten von Aussagen über ein physikalisches System unterschieden:

Sei m eine Observable und E eine Borel-Menge $\neq\emptyset$;

"value-attribution-propositions" $|\langle m,E\rangle| = \{\omega \mid \lambda(m)\subseteq E\}$

"state-attribution-propositions" $|(m,E)| = \{\omega \mid P_\alpha^m(E)=1\}$

Ferner sei $\mathbb{V}:=\{|\langle m,E\rangle|\}$ und $\mathbb{P}:=\{|(m,E)|\}$. Man kann zeigen daß $\mathbb{V}$ und $\mathbb{P}$ mit gewissen Verknüpfungen zueinander isomorphe Orthoposets sind, also eine algebraische Struktur besitzen, die

von G.Hardegree zu den "Quantenlogiken" gerechnet wird.
$\mathbb{V}$ ist also die Menge der Aussagen über aktuelle Meßergebnisse, $\mathbb{P}$ die der 'quantenlogischen' Aussagen, die nach (2.13) notwendig sind.

Betrachten wir nun die Notwendigkeit einer Aussage etwas genauer. Mit (2.5) und (2.6) gilt in $\mathbb{P}$:

$|(m,E)|$ ist <u>notwendig</u> $\Leftrightarrow$ $|\Box(m,E)| = |(m,E)|$

$\Leftrightarrow \{\omega=(\alpha,\lambda) \mid (\alpha R\beta \Rightarrow (\beta,\mu)\in|(m,E)|) \forall (\beta,\mu)\} = |(m,E)|$

$\Leftrightarrow \forall\alpha$ mit $P_m^\alpha(E)=1$ $\forall\beta\in K: \alpha R\beta \Rightarrow (\beta,\mu)\in|(m,E)|$

Daher definiere ich (was bei van Fraassen nicht gemacht wird!):

$|(m,E)|$ ist <u>notwendig relativ zum Zustand α</u>, bzgl. dessen (m,E) wahr ist (also $P_m^\alpha(E)=1$)

$:\Leftrightarrow$ $\forall\beta\in K$ $(\alpha R\beta \Rightarrow (\beta,\mu)\in|(m,E)|$

d.h.: Falls ein Zustand β in Relation zu α steht, so ist $P_m^\beta(E)=1$;
bzw. mit (2.11):
Falls α ein Gemisch aus β und einem gewissen weiteren Zustand γ ist ($\alpha = c\beta+(1-c)\gamma$ mit $c\in(0,1]$), so ist $P_m^\beta(E)=1$.

Entsprechend hat man (mit $\omega=(\alpha,\lambda)$ und $\omega'=(\beta,\mu)$):

$|\langle m,E\rangle|$ ist <u>notwendig relativ zur physikalischen Situation ω</u>, bzgl. deren $\langle m,E\rangle$ wahr ist (also $\lambda(m)\subseteq E$)

$:\Leftrightarrow$ $\forall\omega'$ $(\omega\tilde{R}\omega' \Rightarrow \mu(m)\subseteq E)$

$\Leftrightarrow$ $\forall\omega'$ $(\alpha R\beta \Rightarrow \mu(m)\subseteq E)$

$\Leftrightarrow$ Falls α ein Gemisch aus β und einem gewissen weiteren Zustand γ ist ($\alpha = c\beta+(1-c)\gamma$ mit $c\in(0,1]$), so ist $\mu(m)\subseteq E$.

Falls α einen <u>reinen Zustand</u> beschreibt, so gibt es nur <u>ein</u> β mit $\alpha R\beta$ bzw. $\omega\tilde{R}\omega'$, nämlich $\beta=\alpha$.

(i) Für (m,E) ist die Forderung für die Notwendigkeit in diesem Fall trivialerweise erfüllt, d.h.: $|(m,E)|$ ist notwendig relativ zu jedem reinen Zustand α (bzw. zu jeder physikalischen Situation $\omega=(\alpha,\lambda)$ mit $\alpha=\alpha^2$), bzgl. dessen (m,E) wahr ist.
Anders ausgedrückt: In Bezug auf einen reinen Zustand gibt es für quantenlogische Aussagen (m,E) zwischen Wahrheit und Notwendigkeit keinen Unterschied; dies ist ein Spezialfall von Satz (2.18).

(ii) Für Aussagen der Form $\langle m,E\rangle$ ist folgendes zu beachten: Da α ein reiner Zustand ist, also $U_\alpha = [\alpha]$ gilt, ist $\lambda = \alpha$. Wegen $\beta = \alpha$ ist auch β ein reiner Zustand, und der zugehörige "value state" μ ist ebenfalls gleich β; also

$$\mu = \beta = \alpha = \lambda$$

Damit ist aber die obige Forderung für die Notwendigkeit von $\langle m,E\rangle$ relativ zu (α,λ) erfüllt, da ja nach Voraussetzung $\lambda(m) \subseteq E$ und somit auch $\mu(m) \subseteq E$ gilt.

Wir kommen daher zu dem Ergebnis:

> Jede wahre Aussage über ein quantenmechanisches System in einem reinen Zustand ist (bei van Fraassen) zugleich auch notwendig.

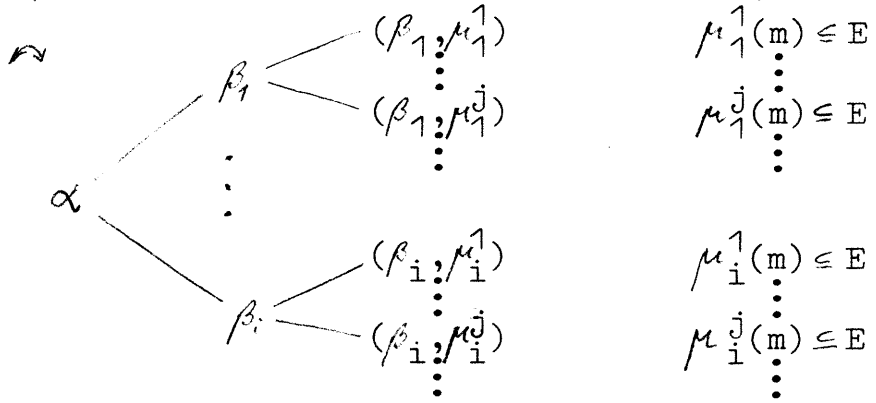
α beschreibe nun ein <u>Gemisch</u>.

(i) Nach Satz (2.18) ist wiederum jedes (m,E) notwendig relativ zu einer physikalischen Situation (α,λ).

(ii) Um die Notwendigkeit einer Aussage $\langle m,E\rangle$ relativ zu (α,λ) zu prüfen, sind alle Situationen (β,μ) mit $\alpha R \beta$ zu betrachten. Für jedes solche (β,μ) ist dann festzustellen, ob $\mu(m) \subseteq E$ gilt.

Schematisch ist dies wie folgt darstellbar:

$|\langle m,E\rangle|$ ist notwendig relativ zu (α,λ)



In jüngster Zeit benutzt van Fraassen neben der Notwendigkeit $\Box$ eine Notwendigkeit $\boxdot$ mit der Gleichheit statt der Relation R [18, p.24]. Für reine Zustände sind die aus $\Box$ und $\boxdot$ gebildeten relativen Notwendigkeiten - wie oben dargestellt - identisch. Für Gemische gilt in Analogie zum obigen Schema:

$|\langle m,E\rangle|$ ist $\boxdot$-notwendig relativ zu (α,λ)

$$\begin{array}{lll} & (\alpha,\mu_1) & \mu_1(m)\subseteq E \\ \curvearrowright\ \alpha & (\alpha,\mu_2) & \mu_2(m)\subseteq E \\ & \vdots & \vdots \\ & (\alpha,\mu_i) & \mu_i(m)\subseteq E \\ & \vdots & \vdots \end{array}$$

Vergleichen wir dies mit der inneren Semantik der Notwendigkeit bei Mittelstaedt (Kap.I.2),die sich schematisch wie folgt darstellen läßt:

Die Aussage A ist notwendig in $(W^W,\lambda^W)_S$

$$\begin{array}{lll} & (W^W,\lambda^{(1)})_S & (W^W,\lambda^{(1)})_S \vdash_{D_m} A \\ \curvearrowright\ W^W & (W^W,\lambda^{(2)})_S & (W^W,\lambda^{(2)})_S \vdash_{D_m} A \\ & \vdots & \vdots \\ & (W^W,\lambda^{(\nu)})_S & (W^W,\lambda^{(\nu)})_S \vdash_{D_m} A \\ & \vdots & \vdots \end{array}$$

Hier liegt eine formale Ähnlichkeit zur obigen $\boxdot$-Notwendigkeit bei van Fraassen vor,doch sind folgende wesentliche unterschiede zu beachten:

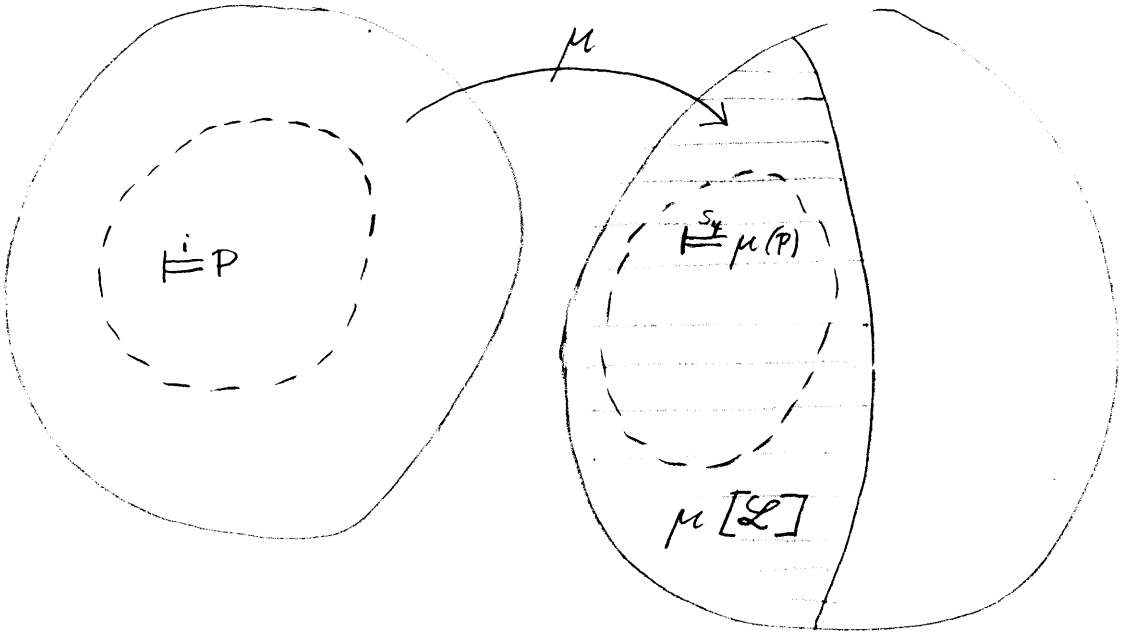
(1) Bei van Fraassen bezeichnet α ein Gemisch; für reine Zustände ist nämlich die Modalität "notwendig" sinnlos. Bei Mittelstaedt dagegen ist W^W als Präparation eines reinen Zustandes zu verstehen,da andernfalls teilweise ein behebbares subjektives Unwissen vorliegt; Modalitäten aber sind erst bei objektivem Unwissen sinnvoll, wenn das Wissen perfekt ist und nicht zu einem vollständigen ergänzt werden kann.

(2) Die "value states" μ_i bei van Fraassen sind reine Zustände aus einer Zerlegung von α. Die Information in (α,μ_i) geht daher nicht über die eines reinen Zustandes hinaus - beinhaltet i.a. sogar weniger -,im Gegensatz zur "möglichen Welt" $(W,\lambda^{(\nu)})_S$ bei Mittelstaedt,wo der Parameter $\lambda^{(\nu)}$ zur Determinierung der bzgl.des reinen Zustandes W objektiv unentschiedenen Aussagen A dient.

III. Interpretation der Quantenlogik im Rahmen einer modalen Sprache bei M.L.Dalla Chiara

1. Zur Bedeutung der Einbettung nichtklassischer in modale Systeme

Betrachten wir zunächst die bekannte Einbettung der intuitionistischen Logik in das modale System S4 (GÖDEL 1933), durch die die Gültigkeit bzw. Ungültigkeit einer Aussage im Rahmen der nichtklassischen intuitionistischen Logik auf eine solche im Rahmen des "klassischen" Modalkalküls S4 zurückgeführt werden kann. S4 ist insofern "klassisch", als sein Axiomensystem aus dem der klassischen Aussagenlogik (Anh.(2.3,a)) und zwei modalen Aussagen besteht. Die Einbettung kann durch verschiedene Interpretationsfunktionen erfolgen, etwa durch die "Gödelsche Interpretation" μ [13, p.265]:



$\mathcal{L}$ Formeln in $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ $\qquad$ $\mathcal{L}^{\Box}$ modale Formeln

$$\mu : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}^{\Box}$$

$$P \longrightarrow \mu(P) = \begin{cases} \Box p & P = p \text{ Variable} \\ \Box\neg\mu(Q) & P = \neg Q \\ \mu(Q) \wedge \mu(R) & P = Q \wedge R \\ \mu(Q) \vee \mu(R) & P = Q \vee R \\ \Box(\mu(Q) \rightarrow \mu(R)) & P = Q \rightarrow R \end{cases}$$

Man beweist [13,p.265],daß jede "modale Übersetzung" $\mu(P)$ einer Aussage P in $\mathcal{L}$ genau dann in S4 wahr ist,wenn sie intuitionistisch wahr ist,d.h.

$$\models^{S4} \mu(P) \quad \leftrightarrow \quad \models^{i} P \ .$$

Ohne die mathematische Relevanz dieses Ergebnisses in Frage stellen zu wollen,kann man doch davor warnen,das Resultat allzu großzügig zu interpretieren.Weder wird der "Sinn intuitionistischer Aussagenverknüpfungen in S4 verständlich gemacht" ([13,p. 264]; die Ungültigkeit des Tertium-non-daturs $\neg p \vee p$ in der intuitionistischen Logik wird nicht durch die korrespondierende Ungültigkeit von $\Box\Diamond\neg p \vee \Box p$ in S4 "verständlich" !),noch kann man die nicht-klassische Eigenschaft der intuitionistischen Logik als unwesentlich bezeichnen.Selbst wenn auch umgekehrt zur obigen Einbettung S4 intuitionistisch interpretierbar wäre (was de facto nicht der Fall ist !),so könnte man die intuitionistische Logik eben nur durch eine modale Logik ersetzen,womit man eine von der klassischen Logik immer noch grundverschiedene Struktur erreicht hätte.

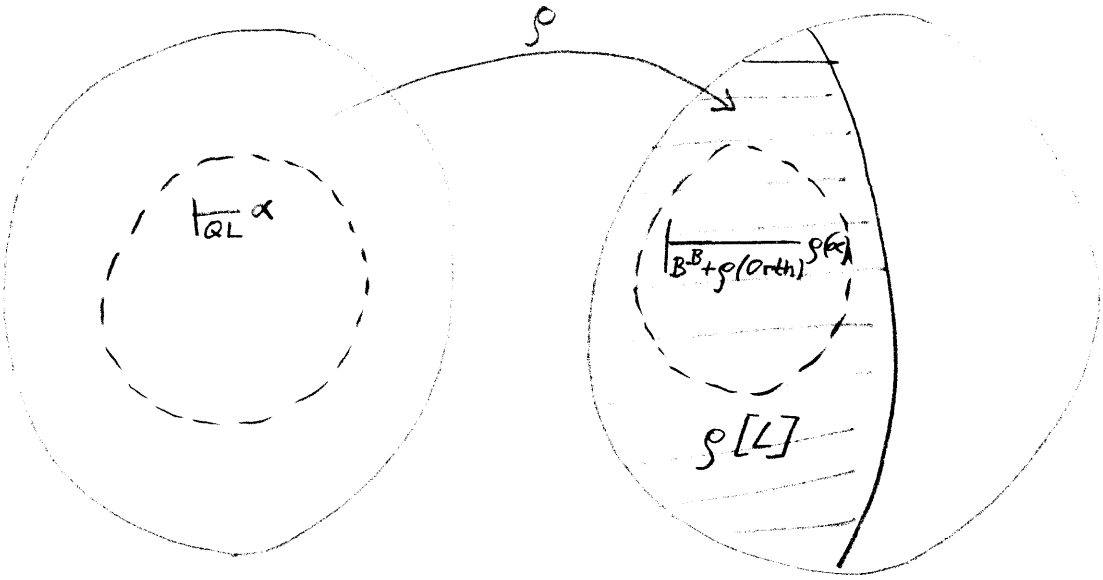
1977 veröffentlichte Frau Dalla Chiara eine Arbeit "Quantum Logic and Physical Modalities"[7],in der sie aufbauend auf früheren Arbeiten (z.B.[5],[6],[9]) eine Sprache der Quantenmechanik, d.h. eine Sprache über ein quantenmechanisches physikalisches System,in eine Sprache übersetzte,deren Syntax einen Funktor L für "notwendig" enthält,also in eine modale Sprache. Ziel dieser Arbeit war es,das Nicht-klassisch-sein der Quantenlogik als unwesentlich darzustellen [7,p.403]:

(A) "From a logical point of view quantum logic is not really essential to the logical development of quantum mechanics, since the role played by this logic can be equivalently substituted by a form of classical modal logic."

Was aber hat Frau Dalla Chiara wirklich gezeigt ?

Ausgangspunkt ihrer Überlegungen ist eine formale prädikatenlogische Sprache,deren Semantik durch einen vollständigen orthokomplementären Verband induziert wird.Die Menge der im Sinne dieser Semantik gültigen Sätze läßt sich durch ein logisches System erfassen,das als "Kalkül MQL der minimalen Quantenlogik" bezeichnet wird.Fügt man diesem das "Orthomodularitätsaxiom" Orth

hinzu, so erhält man den Kalkül QL der Quantenlogik. Die so gewonnene Sprache mit dem zugehörigen Logikkalkül QL wird mittels einer Funktion ϱ in eine modale Sprache eingebettet:



L Formeln in $\neg, \wedge, \rightarrow, \forall$ $\qquad$ L_1 modale Formeln

Das zugehörige logische System, der Kalkül $B^B+\varrho(\mathrm{Orth})$, hat die folgende Form:

klassische Prädikatenlogik 1. Stufe, ferner

Formationsregel:

Ist α eine Formel, so ist auch $L\alpha$ eine Formel.

Axiome:

A5:	$L\alpha \supset \alpha$
A6:	$L(\alpha \supset \beta) \supset (L\alpha \supset L\beta)$
T33:	$\alpha \supset LM\alpha$
ϱ (Orth):	$\alpha \& \sim\beta \supset M(\alpha \& L\sim(\alpha \& \beta))$

Transformationsregel:

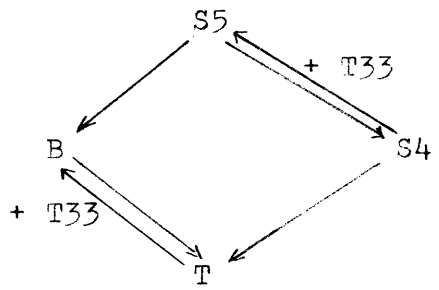
Ist α ein Satz, so ist auch $L\alpha$ ein Satz

Die Axiome A5 und A6 sind die des Feysschen Modalsystems T, das durch das Axiom T33 zum sogen. "Brouwerschen System" B erweitert wird (vgl. [8, p.30/58]). Bei Benutzung der klassischen Prädikatenlogik 1. Sufe als nicht-modale Basis ist bekanntlich [8, p.145] im Brouwerschen System die sogen. "Barcan-Formel"

BF $\qquad \bigwedge_x L\alpha \supset L\bigwedge_x \alpha$

ableitbar.

Während weder B in dem bekannten Modalsystem S4 enthalten ist noch umgekehrt, ist B in S5 enthalten, das seinerseits äquivalent ist zu dem um T33 erweiterten System S4 :



Die von Dalla Chiara benutzte Kripke-Semantik unterscheidet sich von den bekannten Semantiken dieser Art für T, S4, S5 dadurch, daß

(1) eine reflexive und symmetrische "Erreichbarkeits-Relation" R (bei T reflexiv, bei S4 reflexiv und transitiv, bei S5 eine Äquivalenzrelation) und

(2) statt einer Booleschen Algebra nur ein vollständiger orthokomplementärer quasimodularer Verband

benutzt wird. In der Sprache der Quantenmechanik wird der Verband $V(\mathcal{H})$ der Unterräume eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ betrachtet und R ist die Nicht-Orthogonalitätsrelation auf $V(\mathcal{H})$, die reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv ist. (Zur Interpretation dieser Relation R vgl. [23, p. 25].)

Goldblatt [23] gibt Konsistenz- und Vollständigkeitsbeweise für den Kalkül B im aussagenlogischen Fall an. Prädikatenlogische Beweise dieser Art sind bekanntlich bei Gültigkeit der Barcan-Formel etwas einfacher als ohne diese Formel (vgl. [8, pp. 149]), weshalb Dalla Chiara wohl auch deren Gültigkeit in B betont und die Notation B^B benutzt.

Durch das Ergebnis von Dalla Chiara wird die Rolle der Quantenlogik ebensowenig unwichtig (als nichtklassische Logik) wie die der intuitionistischen Logik nach deren Einbettung in S4. Die obige Aussage (A) wird von

Dalla Chiara einige Zeilen später selbst bezweifelt durch die Bemerkung: "...can we really assert that we have completely reduced quantum logic to classical logic ? ... B^B and $B^B+\varrho(\mathrm{Orth})$ are not simply classical logic. Indeed they represent two very particular extensions of classical logic". Genau dies habe ich weiter oben bereits betont: Ein "klassischer" Modalkalkül ist etwas grundsätzlich anderes als die klassische Aussagen- bzw. Prädikatenlogik.

Schließlich ist noch zu fragen, ob es vielleicht eine Übersetzung ϱ^* und einen von B verschiedenen, d.h. nicht-äquivalenten Kalkül B^* gibt, der in Bezug auf die Menge $\varrho^*[\mathcal{L}]$ das gleiche leistet wie B, also

$$\vdash_{QL} \alpha \quad \curvearrowright \quad \vdash_{B^*} \varrho^*(\alpha)$$

In diesem Fall wäre der zur Quantenlogik "passende" Modalkalkül nicht eindeutig.

Im folgenden möchte ich das Vorgehen von Dalla Chiara im einzelnen darstellen:

2. Quantenlogik und ihre modale Interpretation

(2.1) Def.: Fügt man einem logischen System der minimalen Quantenlogik MQL (vgl. Anh.(2.3)(b)) das ("Orthomodularitäts"-) Axiom $(\alpha \to \beta) \to (\beta \to (\alpha \vee (\neg\alpha \wedge \beta)))$ hinzu, so erhält man ein "logisches System der Quantenlogik" QL.

(2.2) Bemerkung: Sei α ein Satz eines syntakt. System LPC (vgl. Anh. (1.2)(c)). Man kann zeigen [7, p.399]: α ist in QL ableitbar $\Leftrightarrow$ α ist algebraisch-quanten-gültig (vgl. Anh.(1.13)).

B) Eine modale Sprache und ihre Beziehung zu einer nichtmodalen Sprache

(2.3) Beispiel zu Anh.(1.1): Ein "syntakt. System der modalen Prädikatenlogik" ist ein Paar $MP := \langle\langle P, V, L_m\rangle, G_m\rangle$, wobei
P und V Mengen wie in Anh.(1.2)(b) sind,
$L_m = \{\sim, \&, \supset, \Lambda, L, \Rightarrow,), (\}$ ist und
G_m aus den folgenden Definitionen besteht:
(i) $\sim, \&, \supset, L, \Rightarrow$ heißen "Funktoren"
(ii) Λ heißt "Allquantor"
(iii)),(heißen "Klammern"
(iv) "Sätze" sind die Elemente der Menge S, für die gilt:
S ist die kleinste der Mengen T mit
(α) $P^m \in P$; $x_1, \ldots, x_m \in V \Rightarrow P^m x_1 \ldots x_m \in T$ ("atomarer Satz")
(β) $A \in T \Rightarrow \sim A, LA \in T$
(γ) $A, B \in T \Rightarrow A\&B, A \supset B, A \Rightarrow B \in T$
(δ) $A \in T, x \in V \Rightarrow (x)A := (\Lambda x)A \in T$

(2.4) Def.: Sei MP ein syntakt. System der modalen Prädikatenlogik.
(i) Ein 5-Tupel $K_1 := \langle I, U, R, \phi, \models\rangle$ heißt "B^B-Kripke-Model zu MP" $:\Leftrightarrow$
I, U, R, ϕ sind wie in Anh.(1.15) definiert und
$\models$ ist eine Relation $\subseteq I \times \{\text{Sätze von MP}\}$ mit

$i \models P^n \underline{d}_1 \ldots \underline{d}_n \Leftrightarrow \langle d_1, \ldots, d_n\rangle \in \phi_i(P^n)$
$i \models \sim\beta \Leftrightarrow$ nicht $i \models \beta$
$i \models \beta\&\gamma \Leftrightarrow i \models \beta$ und $i \models \gamma$
$i \models \beta \supset \gamma \Leftrightarrow (i \models \beta \Rightarrow i \models \gamma)$
$i \models (\Lambda x)\beta \Leftrightarrow i \models \beta(\underline{d})$ für alle $d \in D$
$i \models L\beta \Leftrightarrow j \models \beta \quad \forall j \in I$ mit iRj
$i \models \beta \Rightarrow \gamma \Leftrightarrow (j \models \beta \Rightarrow j \models \gamma \quad \forall j$ mit $iRj)$

(ii) Sei α ein Satz von MP.

(a) $i \models \alpha \quad \forall i \in I \quad \Leftrightarrow: \models_{K_1} \alpha$

(b) α heißt "<u>B^B-gültig</u>" $:\Leftrightarrow \models_{K_1} \alpha$ für alle B^B-Kripke-Modelle K_1.

(2.5) <u>Beispiel</u> zu Anh.(1.4): Eine "Sprache der modalen Prädikatenlogik mit B^B-Kripke-Modell-Semantik" (kurz: "<u>B^B-Sprache</u>") ist ein Paar $\langle MP, VL_K \rangle$, wobei
MP ein syntakt. System der modalen Prädokatenlogik (vgl.(2.3)) und $VL_K = \{ \models_{K_1} \mid K_1$ ist B^B-Kripke-Modell zu MP$\}$ ist.
Dann gilt wegen (2.4)(ii)(b) und Anh.(1.6)(iii) für einen Satz α aus MP: α ist gültig in $\langle MP, VL_m \rangle \Leftrightarrow \alpha$ ist B^B-gültig.

(2.6) <u>Bemerkung</u>: Nach Dalla Chiara [7, p.399] ist es möglich, ein logisc System B^B anzugeben, dessen syntakt. System MP ein solches de modalen Prädikatenlogik ist, so daß gilt:
B^B ist s-konsistent und s-vollständig bzgl. einer B^B-Sprache; d.h. für einen Satz α von MP gilt: $\vdash_{BB} \alpha \Leftrightarrow \alpha$ ist B^B-gültig

(2.7) <u>Def.</u>: Sei L eine O-Sprache (vgl. Anh.(1.14)) und L_1 eine B^B-Sprache. "Die <u>Übersetzungsfunktion</u> ρ von L nach L_1" ist wie folgt definiert

$\rho : \{\text{Sätze von } L\} \longrightarrow \{\text{Sätze von } L_1\}$ mit

$\rho(p) = L(\sim L \sim p) =: LMp$ falls p atomarer Satz von L ist,

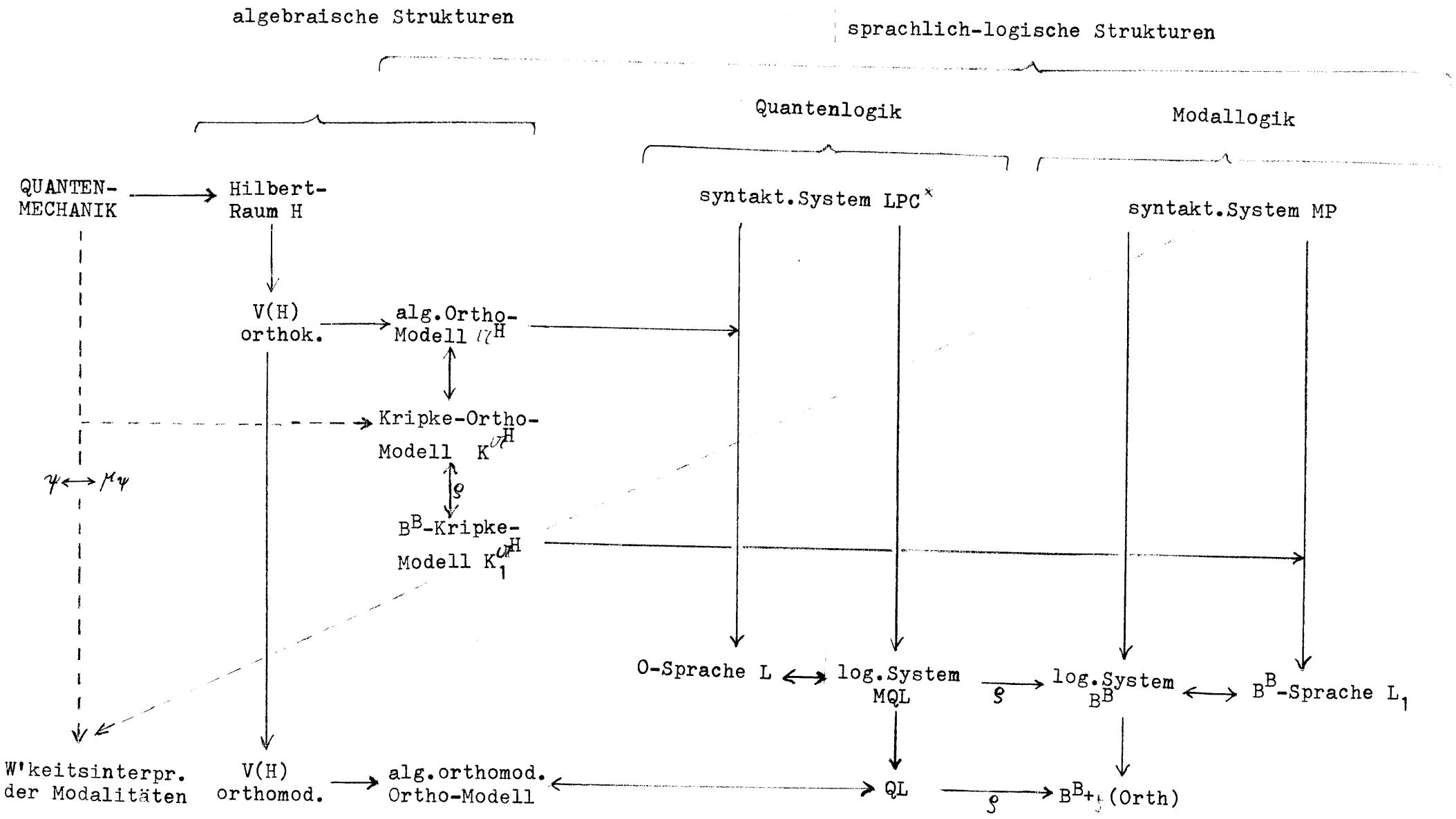
$\rho(\neg\alpha) = L \sim \rho(\alpha), \quad \rho(\alpha \to \beta) = \rho(\alpha) \Rightarrow \rho(\beta)$

$\rho(\alpha \wedge \beta) = \rho(\alpha) \& \rho(\beta), \quad \rho((\forall x)\alpha) = (\bigwedge x)\rho(\alpha)$

(2.8) <u>Bemerkung</u>: (a) Sei L eine O-Sprache und L_1 eine B^B-Sprache; man kann zeigen [7, p.400]:
Jedes Kripke-Ortho-Modell K von L kann mittels ρ in ein B^B-Kripke-Modell K_1 von L_1 übersetzt werden und umgekehrt, so da für jedes $i \in I$ gilt: $i \rhd \alpha \Leftrightarrow i \models \rho(\alpha)$ für jeden Satz α von
(b) Sei $\rho(\text{Orth}) = \rho((\alpha \to \beta) \to (\beta \to (\alpha \vee (\neg\alpha \wedge \beta))))$ die Übersetzung des Orthomodularitäts-Axioms (vgl.(2.1)). Dieses werde dem logischen System B^B hinzugefügt, wodurch man ein logisches System "$B^B + \rho(\text{Orth})$" erhält; dann gilt für einen Satz α des syntakt. Systems LPC* von L [7, p.400]:

(i) $\vdash_{MQL} \alpha$ (d.h. α ist in MQL ableitbar) $\Leftrightarrow \vdash_{B^B} \rho(\alpha)$

(ii) $\vdash_{QL} \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{B^B + \rho(\text{Orth})} \rho(\alpha)$


algebraische Strukturen
sprachlich-logische Strukturen
Quantenlogik
Modallogik
QUANTEN-MECHANIK
Hilbert-Raum H
syntakt.System LPC*
syntakt.System MP
V(H) orthok.
alg.Ortho-Modell $\mathcal{U}^H$
Kripke-Ortho-Modell $K^{\mathcal{U}^H}$
φ
B^B-Kripke-Modell $K_1^{\mathcal{U}^H}$
$\psi \leftrightarrow \mu_\psi$
O-Sprache L
log.System MQL
ϱ
log.System B^B
B^B-Sprache L_1
W'keitsinterpr. der Modalitäten
V(H) orthomod.
alg.orthomod. Ortho-Modell
QL
ϱ
B^B+ (Orth)

3. Hilbertraum-Darstellung der Modalitäten

Die Quantenmechanik kann (teilweise) mit einer wie folgt aufgebauten Sprache L ("sublanguage") beschrieben werden:

Das syntakt. System LPC^* von L ist eines der klass. Prädikatenlogik (vgl. Anh. (1.2)(c)) mit

$P := \{P_i\} = \{q_i \in \mid q_i$ sind "ideal" mögliche Werte(!) der Observablen Q_i; $i=1,\dots,n\}$

(Es gibt also hier nur einstellige Prädikate! Zum "idealen" Wert einer Observablen vgl. [9, p.2]) und

$V := \{\underline{b} \mid \underline{b}$ Name einer Borel-Menge $b \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

Die atomaren Sätze haben also die Form $P_i\underline{b}$ bzw. $q_i \in \underline{b}$, d.h.: "Der Wert q_i der Observablen Q_i liegt in der Borel-Menge b."

Sei nun S ein physikalisches System und H der zugehörige Hilbert-Raum. Der Verband V(H) der Teilräume von H führt "in natürlicher Weise" zu einem algebraischen Ortho-Modell $\mathfrak{A}^H = \langle V(H), v, D\rangle$ mit $D = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $v(\underline{b}) = b$ und $v(P_i): D \longrightarrow V(H)$ mit $v(P_i)(b) = \{\psi \in H \mid P^{\psi}_{Q_i}(b) = 1\}$, wobei wie üblich (vgl. II.(2.9)) $P^{\psi}_{Q_i}: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$

$$b \longrightarrow P^{\psi}_{Q_i}(b) = \sum_{\substack{\Lambda \in b \\ \Lambda \text{ EW von } Q_i}} Sp(\psi \mathcal{P}_{\mathfrak{A}_\Lambda})$$

die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei einer Messung der Observablen Q_i der Wert dieser Observablen in der Borel-Menge b liegt.

Wie in Anh. (1.14) dargestellt, liefert $\mathfrak{A}^H$ zusammen mit dem obigen syntakt. System eine O-Sprache L.

Gemäß Anh. (1.16) gehört zu $\mathfrak{A}^H$ ein Kripke-Ortho-Modell $K^{\mathfrak{A}^H} := \langle \mathcal{B}(\mathbb{R}), I, R, \phi, \rhd\rangle$ mit

$I = \{$abgeschlossene Teilräume $\neq \{0\}$ von $H\}$,

$D = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, R = "Nicht-orthogonal"-Relation

$\phi = \{\phi_X\}_{X \in I}$ mit $\phi_X: P \cup V \longrightarrow \mathcal{P}(D) \cup D$ Funktion mit $\phi_X(\underline{b}) = b$ und $\phi_X(P_i) = \{b \in D \mid X \subseteq v(P_i\underline{b}) = v(P_i)(b)\}$

und $\rhd \subseteq I \times \{$Sätze des obigen syntakt. Systems$\}$ eine Relation mit $X \rhd \alpha \iff X \subseteq v(\alpha)$.

Gemäß (2.8)(a) wird dieses $K^{\mathfrak{A}^H}$ in ein B^B-Kripke-Modell $K_1^{\mathfrak{A}^H} := \langle \mathcal{B}(\mathbb{R}), I, R, \phi, \models\rangle$ übersetzt, wobei I, R und ϕ wie oben definiert sind. Dieses Modell liefert die Semantik für eine B^B-Sprache L_1.

Die Relation R ist auf der Menge $V(\mathcal{H})$ der Teilräume von $\mathcal{H}$ definiert durch die Nichtorthogonalität, d.h.:

Seien $X, Y \in V(\mathcal{H})$,

$$
\begin{aligned}
X R Y &\leftrightarrow X \not\perp Y \\
&\leftrightarrow X \not\subseteq Y^{\perp} = \{f \mid f \perp g \quad \forall g \in Y\} \\
&\leftrightarrow \exists f \in X \ \exists g \in Y : f \not\perp g
\end{aligned}
$$

Im folgenden wollen wir die Semantik von Negation und Modalitäten im Hilbertraum darstellen; wir fragen also danach, wann die Sätze "nicht β", "notwendig β" und "möglich β" wahr sind in einer "Welt" $X \in V(\mathcal{H})$, wobei wir uns auf eindimensionale Welten $X = [\phi]$ beschränken, die den reinen Zuständen eines Systems entsprechen.

(2.9) <u>Negation</u>

a) Sei β eine Aussage über ein physikalisches System. "nicht β" sei ein Satz der O-Sprache (vgl. Anh. (1.14)), also der nichtmodalen Sprache, in der die Quantenlogik formuliert ist. Die Semantik wird geliefert durch das Kripke-Ortho-Modell $K^{\mathcal{U}\mathcal{H}}$. Dann gilt:

Der Satz $\neg\beta$ ist wahr in der Welt X

$$
\begin{aligned}
&\leftrightarrow X \rhd \neg\beta \\
&\leftrightarrow \forall Y R X: \text{ nicht } Y \rhd \beta \\
&\leftrightarrow \forall Y \not\perp X: \text{ nicht } Y \subseteq v(\beta) \\
&\leftrightarrow \forall Y \in V(\mathcal{H}) \ (Y \not\perp X \rightsquigarrow \text{nicht } Y \subseteq v(\beta)) \\
&\leftrightarrow \forall Y \in V(\mathcal{H}) \ (Y \subseteq v(\beta) \rightsquigarrow Y \perp X))
\end{aligned}
$$

b) Der Satz $\neg\beta$ der O-Sprache werde nun mittels ρ in die modale B^B-Sprache übersetzt; natürlich führt die Semantik des B^B-Kripke-Modells in $K_1^{\mathcal{U}\mathcal{H}}$ zum gleichen Ergebnis wie in a):

Der Satz $\neg\beta$ ist wahr in der Welt X

$$
\begin{aligned}
&\leftrightarrow X \rhd \neg\beta \\
&\leftrightarrow X \models \rho(\neg\beta) && (2.8a) \\
&\leftrightarrow X \models L \sim \rho(\beta) && \text{Def. von } \rho \text{ in } (2.7) \\
&\leftrightarrow \forall Y R X: \ Y \models \sim \rho(\beta) && (2.4) \\
&\leftrightarrow \forall Y R X: \text{ nicht } Y \models \rho(\beta) && (2.4) \\
&\leftrightarrow \forall Y \not\perp X: \text{ nicht } Y \rhd \beta && (2.8a) \\
&\leftrightarrow \forall Y \in V(\mathcal{H}) \ (Y \not\perp X \rightsquigarrow \text{nicht } Y \subseteq v(\beta)) \\
&\leftrightarrow \forall Y \in V(\mathcal{H}) \ (Y \subseteq v(\beta) \rightsquigarrow Y \perp X)
\end{aligned}
$$

c) "nicht β" soll nun in der modalen B^B-Sprache formuliert werden; hierzu ist es erforderlich, β mittels ρ zu über-

setzen. Dann liefert die Kripke-Semantik:

Der Satz $\sim\rho(\beta)$ ist wahr in der Welt X

$\Leftrightarrow$ $X \models \sim\rho(\beta)$

$\Leftrightarrow$ nicht $X \models \rho(\beta)$

$\Leftrightarrow$ nicht $X \rhd \beta$

$\Leftrightarrow$ nicht $X \subseteq v(\beta)$

d) Das Ergebnis in a) bzw. b) kann auch äquivalent wiedergegeben werden durch:

Der Satz $\neg\beta$ ist wahr in der Welt X
$\Leftrightarrow$ $\forall \varphi \in \mathcal{H}$ $(\varphi \in v(\beta) \rightsquigarrow \varphi \perp X)$

(#)

Beweis: Daß aus a) die Aussage (#) folgt, ist klar.

Umgekehrt gelte (#) und ferner sei $Y \in V(\mathcal{H})$ mit $Y \subseteq v(\beta)$;

dann ist $\xi \in v(\beta)$ $\forall \xi \in Y$

bzw. $\xi \perp X$ $\forall \xi \in Y$ gemäß (#)

also $Y \perp X$

e) Die Aussage (#) ist gerade die Hilbertraum-Semantik für die notwendige(!) Negation bei Mittelstaedt. Dort gilt nämlich:

Der Satz $\neg A$ ist notwendig im Zustand ϕ (bzw. in der Welt $X = [\phi]$) $\Leftrightarrow$ $\Delta_\phi \neg A$

$\Leftrightarrow$ $\phi \in M_{\neg A}$

$\Leftrightarrow$ $\phi \in \{\psi \in \mathcal{H} \mid \psi \perp \varphi \quad \forall \varphi \in M_A\}$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varphi \in \mathcal{H}$ $(\varphi \in M_A \rightsquigarrow \varphi \perp \phi)$

Demnach besteht folgender Zusammenhang:

Dalla Chiara:		Mittelstaedt:
$[\phi] = X \rhd \neg\beta$	$\Leftrightarrow$	$\Delta_\phi \neg\beta$

Die Notwendigkeit der Negation bei Dalla Chiara kommt gerade in der Übersetzung $\rho(\neg\beta) = L \sim\rho(\beta)$ zum Ausdruck, d.h.: Wird eine modale B^B-Sprache benutzt, so ist die Negation der O-Sprache durch eine notwendige Negation auszudrücken. Würde man in der modalen B^B-Sprache die dort "übliche" Negation $\sim$ benutzen, so wäre dies - wie in c) gezeigt - nicht die Negation eines Satzes über das fragliche physikalische System, da die Semantiken von $\sim$ und $\neg$ verschieden sind.

(2.10) <u>Notwendigkeit</u>

a) Sei β eine Aussage über ein physikalisches System. Der Satz "β ist notwendig" ist in der nicht-modalen O-Sprache nicht formulierbar; daher muß β zunächst mittels ρ

in die modale B^B-Sprache übersetzt werden, in der der Funktor L für "notwendig" auf $\rho(\beta)$ angewendet werden kann. Dann gilt:

Der Satz $L\rho(\beta)$ ist wahr in der Welt X

$\leftrightarrow$ $X \models L\rho(\beta)$

$\leftrightarrow$ $\forall\, Y R X:\ Y \models \rho(\beta)$

$\leftrightarrow$ $\forall\, Y \not\perp X:\ Y \rhd \beta$

$\leftrightarrow$ $\forall\, Y \not\perp X:\ Y \subseteq v(\beta)$

$\leftrightarrow$ $\forall\, Y \in V(\mathcal{H})\ \ (Y \not\perp X \rightarrow Y \subseteq v(\beta))$

$\leftrightarrow$ $\forall\, \varphi \in \mathcal{H}\ \ (\varphi \not\perp X \rightarrow \varphi \in v(\beta))$

b) Dagegen ist die Notwendigkeit bei Mittelstaedt wiederzugeben durch:

(Der Satz) β ist notwendig im Zustand ϕ

$\leftrightarrow$ $\Delta_\phi \beta$

$\leftrightarrow$ $P_\phi \leq P_\beta$

$\leftrightarrow$ $\phi \in M_\beta$

Man erkennt also, daß die Notwendigkeit bei Dalla Chiara stärker ist als die bei Mittelstaedt:

Dalla Chiara:		Mittelstaedt:
$[\phi] = X \models L\rho(\beta)$	$\rightarrow$	$\Delta_\phi \beta$

Die Umkehrung dieser Beziehung ist falsch, da i.a. für ein $\phi \in v(\beta)$ (bzw. $\phi \in M_A$) ein $\psi \in \mathcal{H}$ existiert mit $\psi \not\perp \phi$ und $\psi \notin v(\beta)$.

(2.11) <u>Möglichkeit</u>

a) Sei β eine Aussage über ein physikalisches System. Zur Formulierung des Satzes "β ist möglich" muß β wiederum in die modale B^B-Sprache übersetzt werden; dann liefert die dortige Semantik:

Der Satz $M\rho(\beta)$ ist wahr in der Welt X

$\leftrightarrow$ $X \models M\rho(\beta)$

$\leftrightarrow$ $X \models \sim L \sim \rho(\beta)$ nach Def. von M

$\leftrightarrow$ nicht $X \models L \sim \rho(\beta)$

$\leftrightarrow$ nicht $\forall\, Y \in V(\mathcal{H})\ \ (Y \subseteq v(\beta) \rightarrow Y \perp X)$ (vgl. (2.9b))

$\leftrightarrow$ $\exists\, Y \in V(\mathcal{H})\ \ (Y \subseteq v(\beta)$ und $Y \not\perp X)$

b) Im Rahmen der Mittelstaedtschen Modallogik haben wir:

(Der Satz) β ist möglich im Zustand

$\leftrightarrow$ $\nabla_\phi \beta$

$\leftrightarrow$ nicht $\Delta_\phi \neg\beta$ nach Def. von ∇

$\leftrightarrow$ nicht $P_\phi \leq P_{\neg\beta}$

$\leftrightarrow$ nicht $\phi \in M_{\neg\beta}$

$\curvearrowright$ nicht $\forall \varphi \in \mathcal{H}$ $(\varphi \in M_\beta \curvearrowright \varphi \perp \phi)$ (vgl.(2.9e))
$\curvearrowright$ $\exists \varphi \in \mathcal{H}$ $(\varphi \in M_\beta$ und $\varphi \not\perp \phi)$

Man erkennt unmittelbar die Übereinstimmung der Modalität "möglich" bei Dalla Chiara und Mittelstaedt:

Dalla Chiara:		Mittelstaedt:
$[\phi] = X \models M_\varrho(\beta)$	$\curvearrowright$	$\nabla_\phi \beta$

Da "möglich" via "notwendig" erklärt ist ($M = \sim L \sim$ bzw. $\nabla =$ nicht $\Delta \neg$) erhebt sich sofort die Frage, wie es sein kann, daß die Notwendigkeit bei Dalla Chiara und Mittelstaedt (semantisch) verschieden, die Möglichkeit aber gleich ist. Dies ist aber aufgrund der Betrachtung über die Negation in (2.9) wie folgt zu erklären:

Die Notwendigkeiten sind insofern verschieden, als bei Dalla Chiara - im Gegensatz zu Mittelstaedt - "mögliche Welten" betrachtet werden, d.h. Unterräume von $\mathcal{H}$, die zum vorliegenden Zustand in der (Nichtorthogonalitäts-) Relation R stehen.
Bei Mittelstaedt werden genau diese Welten durch die Negation berücksichtigt, während Dalla Chiara in der modalen Sprache nur eine einfache Negation benutzt, die keinen Bezug nimmt auf andere Welten. Etwas oberflächlich könnte man sagen:

> Dalla Chiara benutzt (in der modalen Sprache !) eine klassische Negation und eine nicht-klassische Notwendigkeit;
> Mittelstaedt dagegen benutzt eine nicht-klassische Negation und eine klassische Notwendigkeit.

Wie wir in (2.9e) gesehen haben, ist die Kombination von Negation und Notwendigkeit, d.h. die notwendige Negation, in beiden Fällen gleich.
Die Negation der notwendigen Negation, welche zur Möglichkeit führt, ist auch bei Mittelstaedt klassisch, da sie auf metasprachlicher Ebene erfolgt; sie führt daher zum gleichen Ergebnis wie die Negation der notwendigen Negation bei Dalla Chiara.

Schließlich sei noch erwähnt, daß der obige Vergleich zwischen Dalla Chiara und Mittelstaedt nicht nur für (eindimensionale) Zustände ϕ gilt, sondern auch für jeden Unterraum $X \in V(\mathcal{H})$. In der Notation von Mittelstaedt entspricht einem solchen X der Unterraum M_W, der das Wissen W über ein System repräsentiert. Man hat z.B.

$$\begin{aligned}
\Delta_W \neg A &\leftrightarrow M_W \subseteq M_{\neg A} \\
&\leftrightarrow M_W \perp M_A \\
&\leftrightarrow \forall \psi \in M_W \ \forall \varphi \in M_A : \psi \perp \varphi \\
&\leftrightarrow \forall \varphi \in M_A \ (\psi \perp \varphi \ \forall \psi \in M_W) \\
&\leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{H} \ (\varphi \in M_A \rightarrow \varphi \perp M_W)
\end{aligned}$$

also (mit analogen Überlegungen wie oben):

Dalla Chiara		Mittelstaedt
$X \rhd \neg\beta$	$\leftrightarrow$	$\Delta_X \neg\beta$
$X \models L\rho(\beta)$	$\leftrightarrow$	$\Delta_X \beta$
$X \models M\rho(\beta)$	$\leftrightarrow$	$\nabla_X \beta$

IV. Vergleichende Bemerkungen

Wie wir gesehen haben, hat die Aussage $\Box A$ ("notwendig A") bei Mittelstaedt (M), Dalla Chiara (D) bzw. van Fraassen (F) im Rahmen einer Hilbertraum-Semantik die folgende Extension:

Sei S ein quantenmechanisches System

$\mathcal{H}$ der zugehörige Hilbertraum

$B = V(\mathcal{H})$ der Verband der Unterräume von $\mathcal{H}$

A eine Aussage über S

M_A der zu A gehörige Unterraum

$K = N(\mathcal{H})$ die Menge der Zustandsoperatoren auf $\mathcal{H}$

$R_\alpha = \{\beta \in K \mid \exists\, c \in (0,1]\ \exists \gamma \in K : \alpha = c\beta + (1-c)\gamma\}$

$U_\alpha = \{\lambda \in K \mid \lambda \in R_\alpha\ ,\ \lambda = \lambda^2\}$

Dann ist

$$\boxed{M}\,A = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \boxed{M}_\varphi A\} = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \Delta_\varphi A\} = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \varphi \in M_A\} = M_A$$

$$\boxed{D}\,A = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \boxed{D}_\varphi A\} = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \forall_{[\psi] \in B}\ (\psi \not\perp \varphi \rightsquigarrow \psi \in M_A)\}$$

$$\boxed{F}\,A = \{\omega = (\alpha, \lambda) \in K \times U_\alpha \mid \forall_{\omega' = (\beta, \mu) \in K \times U_\alpha}\ (\beta \in R_\alpha \rightsquigarrow \omega' \in A)\}$$

$$\boxed{F\cdot}\,A = \{\omega = (\alpha, \lambda) \in K \times U_\alpha \mid \forall_{\omega' = (\beta, \mu) \in K \times U_\alpha}\ (\beta = \alpha \rightsquigarrow \omega' \in A)\}$$

Die Beziehung

$$\boxed{D}\,A \subseteq \boxed{M}\,A$$

besagt, daß jede i.S. von Dalla Chiara notwendige Aussage auch notwendig i.S. von Mittelstaedt ist.

Ein Vergleich zwischen

$$\boxed{M}\,A \quad \text{und} \quad \boxed{F}\,A \quad \text{bzw.} \quad \boxed{F\cdot}\,A$$

konnte nur mit Hilfe der "äußeren Semantik" der Notwendigkeit bei Mittelstaedt hergestellt werden. Da bei Dalla Chiara eine ähnliche Interpretation nicht vorliegt und wegen der (im Ver-

gleich zu Mittelstaedt) verschiedenen Extension der Notwendigkeit wohl auch nicht möglich ist, kann bislang keine Beziehung zwischen

$$\boxed{D}\,A \quad \text{und} \quad \boxed{F}\,A \quad \text{bzw.} \quad \boxed{F\cdot}\,A$$

hergestellt werden.

Für die Aussage $\Diamond A$ ("möglich A") haben wir folgende Extension:

$$\begin{aligned}
\langle M \rangle A &= \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \langle M \rangle_\varphi A\} \\
&= \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \nabla_\varphi A\} \\
&= \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \exists_{[\psi] \in B} (\psi \not\perp \varphi \text{ und } \psi \in M_A)\}
\end{aligned}$$

$$\langle D \rangle A = \langle M \rangle A$$

$$\langle F \rangle A = \{\omega = (\alpha, \lambda) \in K \times U_\alpha \mid \exists_{\omega' = (\beta, \mu) \in K \times U_\alpha} (\beta \in R_\alpha \rightarrow \omega' \in A)\}$$

$$\langle F\cdot \rangle A = \{\omega = (\alpha, \lambda) \in K \times U_\alpha \mid \exists_{\omega' = (\beta, \mu) \in K \times U_\alpha} (\alpha = \beta \rightarrow \omega' \in A)\}$$

Die Gleichheit

$$\langle D \rangle A = \langle M \rangle A$$

drückt die Äquivalenz der Möglichkeit bei Mittelstaedt und Dalla Chiara aus.

Erwähnt sei noch die von van Fraassen in Erice/Sizilien ("Workshop on Quantum Logic", Dez. 1979) angegebene Gleichheit

$$[m,E] = \boxed{D}\,\langle D \rangle\,[m,E]$$

die wegen

$$[m,E] = \boxed{F}\,[m,E]$$

folgendermaßen interpretiert werden kann: Die Wirkung des Operators $\boxed{F}$ auf "quantenlogische" Aussagen $[m,E]$ ist gleich der des Operators $\boxed{D}\,\langle D \rangle$; für beide Operatoren ist $[m,E]$ ein Fixpunkt.

Schließlich möchte ich noch einmal auf die Unterschiede von <u>Wahrheit und notwendiger Wahrheit</u> bei Mittelstaedt, Dalla Chiara und van Fraassen hinweisen:

Betrachten wir dazu eine elementare Aussage a über ein quantenmechanisches System, z.B. "Die Observable m des Systems im Zustand ϕ hat einen Wert in der Borel-Menge E."

(1) Bei Mittelstaedt haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Die Wahrheit der Aussage a wird in einem materiellen Dialog nachgewiesen, d.h. durch eine Messung der Observablen mit der Spektralzerlegung $m = \sum r_k P_k$, bei der der anfängliche Zustand ϕ i.a. übergeht in ein Lüders-Gemisch

$$P_{[\phi']} = \sum P_k P_{[\phi]} P_k$$

bzw. bei einfachen r_k (mit Eigenzuständen ψ_k) in

$$P_{[\phi']} = \sum P_{[\psi_k]} \, Sp(P_{[\psi_k]} P_{[\phi]}) .$$

Im Hilbertraum-Formalismus hat man also:

$$a \text{ ist wahr (im Zustand } \phi) \leftrightarrow \phi' \in M_a$$

wobei M_a der zur Aussage a gehörige Unterraum ist.

b) Ist bei der Messung von m

$$P_{[\phi']} = P_{[\phi]}$$

d.h. ist ϕ ein Eigenzustand ψ_k von m, also die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von m den Wert r_k zu erhalten, gleich Eins

$$Prob_m^{\phi}(r_k) = 1$$

so ist a notwendig, d.h. es gilt $\Delta_\phi a$; also

$$\Delta_\phi a \leftrightarrow \phi \in M_a$$

(2) Dalla Chiara definiert nur den folgenden Wahrheitsbegriff (vgl. [7, p.401]):

$$a \text{ ist wahr (im Zustand } \phi) \leftrightarrow \phi \in M_a$$

Nach Definition der Übersetzungsfunktion ρ (vgl. III.(2.7)) geht a bei Benutzung der modalen Sprache L_1 über in

$$\rho(a) = LM\,a$$

wodurch zum Ausdruck kommt, daß die Wahrheit von a eine notwendige Wahrheit ist. Wie wir in III.(2.9) gesehen haben, ist

$$\neg a \text{ wahr (im Zustand } \phi) \leftrightarrow \phi \in M_{\neg a}$$

und in der modalen Sprache ist a notwendig nicht wahr.
Wahrheit und Falschheit sind bei Dalla Chiara immer notwendig; eine Wahrheit i.S. von Mittelstaedt wird bei ihr nicht berücksichtigt.

(3) Bei van Fraassen schließlich haben wir - wie in II.3 dargestellt - zwei Arten von Aussagen zu unterscheiden:

(m,E) sind die "quantenlogischen" Aussagen, bei denen Wahrheit und notwendige Wahrheit äquivalent sind, nämlich dann, wenn

$$\mathrm{Prob}_m^{\phi}(E) = 1$$

gilt.

$\langle m,E \rangle$ ist für reine Zustände ϕ notwendig wahr, falls es wahr ist, und umgekehrt. Für Gemische (ϕ Zustandsoperator mit $\phi \neq \phi^2$) besteht die Möglichkeit, daß $\langle m,E \rangle$ wahr, aber nicht notwendig wahr ist.

Anhang: Sprachlich-logische Strukturen aus axiomatischer Sicht

1. Formale Sprachen

(1.1) Def.: Das Paar $Syn := \langle V, G \rangle$ heißt "syntaktisches System": $\Leftrightarrow$
V ist eine abzählbare Menge (das "Vokabular", oder "die Menge der Worte")
G ist eine Definition (die "Grammatik"), die festlegt, wie aus dem Vokabular "Namen", "Sätze" und "Funktoren" zu bilden sind.

(1.2) Beispiele: (a) Ein "syntakt. System von Aussagen" PCS ist ein Paar $\langle\langle \mathfrak{A}, L\rangle, G\rangle$, wobei $\mathfrak{A}$ eine abzählbare Menge (die der "atomaren Sätze"), $L = \{\&, \neg,), (\}$ mit $L \cap A = \emptyset$ (die "logischen Zeichen") ist und G aus den Definitionen besteht:
(i) $\&, \neg$ heißen "Funktoren"
(ii)), (heißen "Klammern"
(iii) "Sätze" sind die Elemente der Menge S, für die gilt:
S ist die kleinste $\mathfrak{A}$ enthaltende Menge mit: Sind $A, B \in S$, dann sind auch $A\&B, \neg A \in S$.

(b) Ein "syntaktisches System der klassischen Prädikatenlogik" LPC ist ein Paar $\langle\langle P, V, L\rangle, G\rangle$, wobei
$P = \{P^m, Q^n, \ldots\}$ eine abzählbare Menge (die "Prädikate(n-Variablen)" mit einer "Stellenzahl"),
$V = \{x, y, z, \ldots\}$ eine abzählbare Menge (die "(Individual-) Variablen") und
$L = \{\neg, \vee, \forall,), (\}$ ist,
und G aus den folgenden Definitionen besteht:
(i) $\neg, \vee$ heißen "Funktoren"
(ii) $\forall$ heißt "Allquantor"
(iii)), (heißen "Klammern"
(iv) "Sätze" sind die Elemente der Menge S, für die gilt:
S ist die kleinste der Mengen T, für die gilt:
(α) $P^m \in P; x_1, \ldots, x_m \in V \Rightarrow P^m x_1 \ldots x_m \in T$ ("atomarer Satz"),
(β) $A \in T \Rightarrow \neg A \in T$, ($\gamma$) $A, B \in T \Rightarrow A \vee B \in T$,
(δ) $A \in T, x \in V \Rightarrow (x)A := (\forall x)A \in T$.

(c) Bekanntlich kann man in einem syntakt. System der klass. Prädikatenlogik statt des Funktors $\vee$ einen Funktor $\wedge$ einführen, der sich auch durch die Funktoren $\vee$ und $\neg$ ausdrücken ließe. Ferner kann man einen Funktor $\rightarrow$ einführen, der ebenfalls durch die gegebenen Funktoren ausdrückbar ist; d.h. man betrachtet ein Paar $LPC^* := \langle\langle P, V, L^*\rangle, G^*\rangle$, wobei P und V Mengen wie in (b) sind,
$L^* = \{\neg, \wedge, \rightarrow,), (\}$ ist, und G^* wie in (b) gegeben ist, aber mit
(γ) $A, B \in T \Rightarrow A \wedge B \in T$ und $A \rightarrow B \in T$.

(1.3) <u>Def.</u>: Sei Syn ein syntakt. System, S sei die Menge der Sätze von Syn, $T \subset S$. Eine Funktion $v: T \rightarrow \{1, 0\}$ heißt "eine <u>Bewertung</u> von Syn".

(1.4) <u>Def.</u>: (i) Das Paar $L := \langle Syn, VL\rangle$ heißt "(formale) <u>Sprache</u>": $\Leftrightarrow$
Syn ist ein syntakt. System (die "Syntax der Sprache"),
$VL \subset \{v \mid v$ Bewertung von Syn$\}$ (die "zulässigen Bewertungen der Sprache", oder die "Semantik der Sprache")
(ii) $S_L := \{S \mid S$ ist Satz der Syntax von $L\}$ heißt "Menge der <u>Sätze von L</u>".

(1.5) <u>Beispiel</u>: Eine "zweiwertige Aussagen-Sprache" ist ein Paar $\langle PCS, VL_0\rangle$, wobei
PCS ein syntakt. System von Aussagen (vgl. (1.2)) und
VL_0 die Menge der Bewertungen v von PCS mit
$v(A) \in \{1, 0\}$; $v(\neg A) = 1 \leftrightarrow v(A) = 0$ und
$v(A \& B) = 1 \leftrightarrow v(A) = v(B) = 1$ für alle $A, B \in S$ ist

(1.6) <u>Def.</u>: Sei $L = \langle Syn, VL\rangle$ eine Sprache, $X \subset S_L$, $v \in VL$, $A \in S_L$.
(i) "X wird durch v <u>erfüllt</u>": $\Leftrightarrow$ "v erfüllt X" : $\Leftrightarrow$
$v(B) = 1 \ \forall B \in X$
(ii) "v <u>erfüllt</u> A" : $\Leftrightarrow$ v erfüllt $\{A\}$
(iii) $\Vdash A$: $\Leftrightarrow$ "A ist ein <u>gültiger</u> Satz von L" : $\Leftrightarrow$
v erfüllt A $\forall v \in VL$
(iv) $X \Vdash A$: $\Leftrightarrow$ "X <u>hat</u> A in L <u>semantisch zur Folge</u>" : $\Leftrightarrow$
(v erfüllt X $\rightsquigarrow$ v erfüllt A) $\forall v \in VL$

(1.7) <u>Def.</u>: Sei L Sprache, $X \subset S_L$.
X heißt "<u>Theorie</u> in der Sprache L" (oder "(deduktives) System in L") : $\Leftrightarrow$ $(X \Vdash A \rightsquigarrow A \in X)$ $\forall A \in S_L$

(1.8) <u>Def.</u>: Sei X eine Theorie in der Sprache L, $Y \subset S_L$.
Y heißt "Menge der <u>Axiome</u> für X" $:\Leftrightarrow$ $Y \vdash A \quad \forall A \in X$

(1.9) <u>Def.</u>: Sei L eine Sprache, $Y \subset S_L$, $X \subset S_L$.
(i) X und Y heißen "<u>semantisch äquivalent</u>" $:\Leftrightarrow$
(v erfüllt X $\leftrightarrow$ v erfüllt Y) $\forall v \in VL$
(ii) X heißt "<u>endlich axiomatisierbar</u> in L" $:\Leftrightarrow$
Es existiert eine endliche Menge $Z \subset S_L$ so, daß Z und X semantisch äquivalent sind.

(1.10) <u>Def.</u>: Sei LPC ein syntakt. System der klass. Prädikatenlogik (vgl. (1.2)(b)). Ein Paar $M := \langle D, g \rangle$ heißt "ein <u>Modell</u> der klassischen Prädikatenlogik" (auch: "LPC-Modell") $:\Leftrightarrow$
D ist eine nichtleere Menge,
$g: P \cup V \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(D^i)$ ist eine Funktion (die "Wert-Zuordnung", "value-assignement") mit
$g(P^n) \subseteq (D^n)$ für $P^n \in P$ und
$g(x) \in D$ für $x \in V$.
$g|_P$ heißt auch "Interpretations-Funktion von M",
$g|_V$ auch "Zuordnungs-Funktion für M".

(1.11) <u>Bemerkung</u>: Sei LPC ein syntakt. System der klass. Prädikatenlogik.
(i) Sei M ein zu LPC gehöriges Modell. Dann wird durch M wie folgt eine Bewertung v_M von LPC induziert:
$v_M: \{\text{Sätze von LPC}\} \longrightarrow \{0,1\}$ mit
$v_M(P^n x_1 \ldots x_n) = 1 \Leftrightarrow \langle g(x_1), \ldots, g(x_n) \rangle \in g(P^n)$
$v_M(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow v_M(A) = 1$ oder $v_M(B) = 1$
$v_M(\neg A) = 1 \Leftrightarrow v_M(A) = 0$
$v_M((x)A) = 1 \Leftrightarrow v_{M'}(A) = 1$ für alle $v_{M'}$, für die gilt:
$v_{M'}$ wird durch eine Wert-Zuordnung g' eines LPC-Modells M' mit $g'|_{P \cup (V - \{x\})} = g|_{P \cup (V - \{x\})}$ induziert.
(ii) Ein Satz A von LPC heißt "<u>LPC-gültig</u>" $:\Leftrightarrow$ $v_M(A) = 1$ für alle LPC-Modelle M $\Leftrightarrow$: $\models_M A$ für alle LPC-Modelle M.

(1.12) <u>Beispiel</u> zu (1.4): Eine "Sprache der klassischen Prädikatenlogik mit Modell-Semantik" ist ein Paar $\langle LPC, VL_m \rangle$, wobei LPC ein syntakt. System der klass. Prädikatenlogik (vgl. (1.2)(b)) und $VL_m = \{v_M \mid v_M$ ist eine durch ein LPC-Modell M induzierte Bewertung von LPC$\}$ ist.

(Vgl. die "referential quantifier language" bei [19, p.109]!)
Dann gilt wegen (1.6)(iii) und (1.11)(ii) für einen Satz A aus LPC: A ist gültig in $\langle LPC, VL_m \rangle \Leftrightarrow$ A ist LPC-gültig.

(1.13) <u>Def.</u>: (nach Dishkant und Dalla Chiara; vgl. [25, pp.392])
Sei LPC^* ein syntakt. System der klass. Prädikatenlogik (vgl. (1.2)(c)).

(i) Ein Tripel $\mathfrak{A} := \langle B, v_{\mathfrak{A}}, D \rangle$ heißt "<u>algebraisches Ortho-Modell</u>"
$:\Leftrightarrow$ $\mathcal{B} = \langle B, \leq, \perp, 1, 0 \rangle$ ist ein vollständiger orthokomplementärer Verband,
D ist eine nichtleere Menge, und
$v_{\mathfrak{A}}: P \cup V \cup \{\text{Sätze von } LPC^*\} \longrightarrow D \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} B^{D^i}) \cup B$ ist eine Funktion
mit: $v_{\mathfrak{A}}(P^n): D^n \longrightarrow B$ ist eine Funktion für $P^n \in P$
$v_{\mathfrak{A}}(\underline{d}) = d \in D$ für $\underline{d} \in V$
$v_{\mathfrak{A}}(P^n \underline{d}_1 \ldots \underline{d}_n) = v_{\mathfrak{A}}(P^n)(v_{\mathfrak{A}}(\underline{d}_1), \ldots, v_{\mathfrak{A}}(\underline{d}_n))$
$v_{\mathfrak{A}}(\neg \beta) = (v_{\mathfrak{A}}(\beta))^{\perp}$ für einen Satz β
$v_{\mathfrak{A}}(\beta \wedge \gamma) = v_{\mathfrak{A}}(\beta) \cap v_{\mathfrak{A}}(\gamma)$ für Sätze β und γ
$v_{\mathfrak{A}}(\beta \rightarrow \gamma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_{\mathfrak{A}}(\beta) \leq v_{\mathfrak{A}}(\gamma) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ "
$v_{\mathfrak{A}}((x)\beta) = \bigcap_{\underline{d} \in D} v_{\mathfrak{A}}(\beta(x/\underline{d}))$ für einen Satz β.

(ii)(α) Ein Satz α von LPC^* heißt "<u>algebraisch-gültig</u>" $:\Leftrightarrow$
$v_{\mathfrak{A}}(\alpha) = 1$ für alle algebraischen Ortho-Modelle $\mathfrak{A} \Leftrightarrow$:
$\models_{\mathfrak{A}} \alpha$ für alle algebraischen Ortho-Modelle $\mathfrak{A}$.

(β) Ein Satz α von LPC^* heißt "<u>algebraisch-quanten-gültig</u>"
$:\Leftrightarrow$ $\models_{\mathfrak{A}} \alpha$ für alle algebraischen Ortho-Modelle, bei denen B zusätzlich quasimodular ist.

(1.14) <u>Beispiel</u> zu (1.4): Eine "Sprache der klassischen Prädikatenlogik mit Ortho-Modell-Semantik" (kurz: "<u>O-Sprache</u>") ist ein Paar $\langle LPC^*, VL_a \rangle$, wobei LPC^* ein syntakt. System der klass. Prädikatenlogik (vgl. (1.2)(c)) und $VL_a = \{v_{\mathfrak{A}} \mid \mathfrak{A}$ ist algebr. Ortho-Modell zu $LPC^*\}$ ist.
Dann gilt wegen (1.6)(iii) und (1.13)(ii) für einen Satz A aus LPC^*: A ist gültig in $\langle LPC^*, VL_a \rangle \Leftrightarrow$ A ist algebr.-gültig.

(1.15) <u>Def.</u>: Sei LPC^* ein syntakt. System der klass. Prädikatenlogik (vgl. (1.2)(c)).

(i) Ein Tripel $K := \langle U, I, R, \phi, \rhd \rangle$ heißt "<u>Kripke-Ortho-Modell</u>"

$:\Leftrightarrow$ U ist eine nichtleere Menge (das "Universum von K"),

I ist eine nichtleere Menge (die "(möglichen) Welten" von K) mit $I \cap U = \emptyset$,

R ist eine reflexive und symmetrische Relation (die "Erreichbarkeits-Relation"),

$\phi = \{\phi_i\}_{i \in I}$ ist eine Menge von Funktionen ϕ_i:

$\phi_i : P \cup V \longrightarrow U \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(U^i)$ mit

$\phi_i(\underline{d}) = d \in U$ für $\underline{d} \in V$

$\phi_i(P^n) \subseteq U^n$ für $P^n \in P$ und

$\rhd$ ist eine Relation $\subseteq I \times \{\text{Sätze von } LPC^*\}$ mit

$i \rhd P^n \underline{d}_1 \ldots \underline{d}_n \Leftrightarrow \langle \phi_i(\underline{d}_1), \ldots, \phi_i(\underline{d}_n) \rangle \in \phi_i(P^n)$

$i \rhd \neg \beta \Leftrightarrow (\text{nicht } j \rhd \beta) \ \forall j$ mit iRj

$i \rhd \beta \wedge \gamma \Leftrightarrow i \rhd \beta$ und $i \rhd \gamma$

$i \rhd \beta \rightarrow \gamma \Leftrightarrow (j \rhd \beta \Rightarrow j \rhd \gamma \ \forall j$ mit $iRj)$

$i \rhd (x)\beta \Leftrightarrow i \rhd \beta(\underline{d}) \ \forall d \in U$;

ferner soll für einen atomaren Satz p von LPC^* gelten:

$i \rhd p \Leftrightarrow \forall j$ mit $iRj \ \exists k$ mit $jRk : k \rhd p$

(ii) Ein Satz α von LPC^* heißt "<u>Kripke-gültig</u>" $:\Leftrightarrow$ $(i \rhd \alpha \ \forall i \in I)$ für alle Kripke-Ortho-Modelle K $\Leftrightarrow$: $\models_K \alpha$ für alle Kripke-Ortho-Modelle K.

(1.16) <u>Bemerkung</u>: Man kann zeigen [7, p.395]:

(i) Zu jedem algebr. Ortho-Modell $\mathfrak{A}$ existiert ein Kripke-Ortho-Modell $K^{\mathfrak{A}}$ mit

$\models_{\mathfrak{A}} \alpha = \models_{K^{\mathfrak{A}}} \alpha$ für jeden Satz α von LPC^*

(ii) Zu jedem Kripke-Ortho-Modell K existiert ein algebr. Ortho-Modell $\mathfrak{A}^K$ mit

$\models_K \alpha = \models_{\mathfrak{A}^K} \alpha$ für jeden Satz α von LPC^*.

2. Logische Systeme

(2.1) Def.: (i) Ein Tripel $LS := \langle Syn, Th, \vdash \rangle$ heißt "logisches System"
$:\Leftrightarrow$ Syn ist ein syntakt.System,
$\vdash \subset \mathcal{P}(S) \times S$, wobei S die Menge der Sätze von Syn ist
$(X \vdash A :\Leftrightarrow (X,A) \in \vdash)$,
$Th = \{A \in S \mid \vdash A\} := \{A \in S \mid \emptyset \vdash A\}$ (die Menge der "Theoreme").
(ii) "A ist aus X ableitbar" $:\Leftrightarrow X \vdash A$
(iii) $S_{LS} := \{S \mid S$ ist Satz des Syntakt.Systems von $LS\}$
heißt "Menge der Sätze von LS"

(2.2) Def.: Sei L eine Sprache, LS ein log.System. LS heißt
(i) "S-konsistent bzgl.L" $:\Leftrightarrow (\vdash A \rightsquigarrow \nvdash A) \quad \forall A \in S_{LS}$
(ii) "S-vollständig bzgl.L" $:\Leftrightarrow (\nvdash A \rightsquigarrow \vdash A) \quad \forall A \in S_L$
(iii) "A-konsistent bzgl.L" $:\Leftrightarrow (X \vdash A \rightsquigarrow X \nvdash A) \quad \forall \{A\}, X \subset S_{LS}$
(iv) "schwach A-vollständig bzgl.L" $:\Leftrightarrow$
$(X \nvdash A \rightsquigarrow X \vdash A) \quad \forall \{A\}, X \subset S_L, X$ endlich
(v) "stark A-vollständig bzgl.L" $:\Leftrightarrow$
$(X \nvdash A \rightsquigarrow X \vdash A) \quad \forall \{A\}, X \subset S_L$

(2.3) Beispiele: (a) Ein "System der klass.Aussagenlogik" besteht aus einem syntakt.System PCS (vgl.(1.2)) und dem "klass.Aussagenkalkül", der "Axiome" und "Schlußregeln" umfaßt. Zunächst definiert man zur Abkürzung $A \rightarrow B := \neg(\neg(\neg A) \& \neg B)$, dann seien für (feste!) $A, B, C \in \mathcal{U}$ die Sätze

A1. $A \rightarrow (A \& B)$ A3. $\neg(A \& B) \rightarrow \neg(B \& A)$
A2. $(A \& B) \rightarrow A$ A4. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg(C \& B) \rightarrow \neg(C \& A))$

"Axiome", die zur Menge Th der Theoreme gehören sollen. Alle weiteren Theoreme erhält man durch Anwendung der "Schlußregeln" (Sub) Ist A ein Theorem, so auch $S_p^B(A) \quad \forall B \in \mathcal{U}$
(MP) Sind A und $A \rightarrow B$ Theoreme, so auch B;
dabei ist p ein atomarer Satz und

$$S_p^A(B) := \begin{cases} B, \text{falls } B \text{ atomarer Satz} \neq p \\ A, \text{falls } B = p \\ \neg S_p^A(C), \text{falls } B = \neg C \\ (S_p^A(C) \& S_p^A(D)), \text{ falls } b = (C \& D). \end{cases}$$

Schließlich ist $\vdash = \emptyset \times Th$.
Es gilt bekanntlich (vgl. [19, pp.82]): Ein System der klass. Aussagenlogik ist A-Konsistent und stark A-vollständig bzgl. einer zweiwertigen Aussagen-Sprache.

(b) Ein "logisches System der <u>minimalen Quantenlogik</u>" MQL (auch: "Kalkül der minimalen Quantenlogik") besteht aus einem syntakt.System LPC*(vgl.(1.2)(c)) und der bei [25,pp.396] aufgeführten Menge von Axiomen und Schlußregeln.
Man kann zeigen [25,p.397]: MQL ist s-konsistent und s-vollständig bzgl.einer O-Sprache (vgl.(1.14)).

(2.4) <u>Def.</u>: Sei $L=\langle Syn, VL\rangle$ eine Sprache und $LS=\langle Syn, Th, \vdash\rangle$ ein log. System.
VL heißt "eine <u>Interpretation</u> von LS" $:\Leftrightarrow$ LS ist A-konsistent und stark A-vollständig bzgl.L.

Literatur

[1] van Fraassen,B.C.: A Formal Approach to the Philosophie of Science; R.Colodny (Hrsg.): Paradigms and Paradoxes,University of Pittsburgh Press,Pittsburgh,1972; p.303-366

[2] van Fraassen,B.C.: Semantic Analysis of Quantum Logic; in C.A. Hooker (Hrsg.): Contemporary Research in the Foundations and Philosophie of Quantum Theory,D.Reidel Publ.Comp.,Dordrecht, 1973; p.80-113

[3] van Fraassen,B.C.: The Einstein-Podolsky-Rosen Paradox; in P. Suppes (Hrsg.): Logic and Probability in Quantum Mechanics (Synthese Library Vol.78),D.Reidel Publ.Comp.,Dordrecht,1976; p.283-301

[4] van Fraassen,B.C.+ Hooker,C.A.: A Semantic Analysis of Niels Bohr's Philosophy of Quantum Theory; in W.L.Harper-C.A.Hooker; Foundations of Probability Theory,Statistical Inference,and Statistical Theory of Science,Vol.III:Foundations and Philosophy of Statistical Theories in the Physical Sciences (The University of Western Ontario Series in Philosophy of Science,Vol. 6-III),D.Reidel Publ.Comp.,Dordrecht,1976; p.221-241

[5] Dishkant,H.: Semantics of the minimal Logic of Quantum Mechanics; Studia Logica XXX (1972),p.23-30

[6] Dalla Chiara,M.L.: A General Approach to non Distributive Logics; Studia Logica XXXV (1976),p.139-162

[7] Dalla Chiara,M.L.: Quantum Logic and Physical Modalities; J.Phil. Logic 6 (1977),p.391-404

[8] Hughes,G.E. - Cresswell,M.J.: An Introduction to Modal Logic; Methuen & Co.Ltd.,London,1972 (2nd printing)

[9] Dalla Chiara,M.L. - Toraldo di Francia,G.: The Logical Dividing Line between Deterministic and Indeterministic Theories; Studia Logica XXXV (1976),p.1-5

[10] Dalla Chiara,M.L.: Logical Self Reference,Set Theoretical Paradoxes and the Measurement Problem in Quantum Mechanics; J.Phil.Logic 6 (1977),p.331-347

[11] Mittelstaedt,P.: Philosophische Probleme der modernen Physik,4.Aufl.; Bibl.Inst.,Mannheim-Wien-Zürich 1972

[12] van Fraassen,B.C.: Formal Semantics and Logic; The Macmillan Comp. - Collier Macmillan Ltd.,New York - London 1971

[13] Rautenberg,W.: Klassische und nichtklassische Aussagenlogik; F.Vieweg & Sohn,Braunschweig-Wiesbaden 1979

[14] Dalla Chiara,M.L.: Some metalogical pathologies of Quantum Logic; unveröffentl.Manuskript 1979

[15] Mittelstaedt,P.: Quantum Logic; D.Reidel Publ.Comp., Dordrecht 1978

[16] Mittelstaedt,P.: The Modal Logic of Quantum Logic; J.Phil.Logic 8 (1979) p.479-504

[17] Burghardt,F.J.: Modale Quantenmetalogik mit dialogischer Begründung; Dissertation,Köln 1979

[18] van Fraassen,B.C.: A modal interpretation of Quantum Mechanics; unveröffentl.Manuskript,1979

[19] van Fraassen,B.C., persönl.Mitteilung vom 12.6.1980

[20] Mittelstaedt,P.: The Dialogic Approach to Modalities in the Language of Quantum Physics; unveröffentl.Manuskript 1979

[21] Mittelstaedt,P.: Wahrheit,Wirklichkeit und Logik in der Sprache der Physik; unveröffentl.Manuskript 1980

[22] Burghardt,F.J.: Modal Quantum Logic and its Dialogic Foundation; International Journal of Theoretical Physics (im Druck)

[23] Goldblatt,R.I.: Semantic Analysis of Orthologic; Journal of Philosophical Logic 3 (1974) p.19-35

[24] Stachow,E.-W.: Der quantenmechanische Wahrscheinlichkeitskalkül; unveröffentl.Manuskript 1980