

Franz J. Burghardt

SPRACHE UND NOTWENDIGKEIT IN DER QUANTENMECHANIK

Über die Möglichkeiten, Modalitäten durch Benutzung
formaler Sprachen mit der Quantenmechanik in Verbin-
dung zu bringen

Köln 1978

Teil I

Zur Mittelstaedt-Stachowschen Objektsprache

Überblick

(A) In den 30er Jahren untersuchten v. Neumann und Birkhoff die Struktur der Menge der Teilräume eines Hilbert-Raumes bzw. die der Menge der Projektionsoperatoren auf diese Teilräume, die mit "Eigenschaften eines physikalischen Systems" identifiziert wurden ([13], [14]; vgl. auch [3, pp. 109]); diese Untersuchungen wurden nach 1960 u. a. durch Jauch [15] und Piron [16] fortgesetzt. Hierbei wurden (physikal.) "Aussagen" durch "Ja-Nein-Experimente" repräsentiert, die darüber entscheiden, ob ein System eine Eigenschaft hat oder nicht [15, p. 73].

(B) Im Anschluß an Arbeiten von Lorenzen und Lorenz ([1], [4], [5]) wurde von Mittelstaedt und Stachow eine formale Sprache entwickelt, deren "dialogische" Semantik durch die Bedingungen festgelegt ist, unter denen wissenschaftliches Sprechen überhaupt erst möglich bzw. sinnvoll ist ([10], [11]); im Gegensatz zu Lorenzen und Lorenz wurde nicht mehr vorausgesetzt, daß eine einmal bewiesene Aussage im weiteren Verlauf eines Dialogs immer wieder als wahre Aussage verfügbar ist. Die Menge der im Sinne dieser dialogischen Semantik wahren Aussagen der Sprache sind in Form eines Kalküls T_{eff} bzw. Q_{eff} konsistent und vollständig erfaßbar ([7], [8]). Nimmt man das Tertium-non-datur, das im Kalkül Q_{eff} nicht ableitbar ist, als wahre Aussage hinzu, so erhält man den Kalkül Q der "vollen Quantenlogik" [12]. Die soeben erwähnten "wahren" Aussagen sind solche, die unabhängig von der Wahrheit elementarer Aussagen (in der Quantenmechanik repräsentiert durch "Ja-Nein-Experimente"; vgl. auch [17, p. 488]) gelten; daher werden sie auch "formal-wahr" genannt. Setzt man ferner die "Wertdefinitheit" elementarer Aussagen voraus, d. h. eine elementare Aussage ist entweder wahr oder falsch, so ist die Menge der formal-wahren Aussagen durch einen zu Q äquivalenten Kalkül Q_{eff} erfaßbar [12].

Das wichtigste Ziel der Forschungen von Mittelstaedt und Stachow ist eine "logische Interpretation" des Verbandes der Teilräume eines Hilbert-Raums, wobei durch den operativen Zugang zur Logik zugleich eine dialogische Semantik der passenden, d. i. Quanten-Logik geliefert wird. Leider wird in keiner Publikation der Autoren präzise gesagt, was mit "logischer Interpretation" gemeint ist; auch der in den jüngsten Arbeiten benutzte Begriff "Modell" wird nicht definiert. Bedenkt man, daß die Autoren einen operativen Zugang zur Logik wählen, so sind auch Hinweise

auf Birkhoffs Vergleiche zwischen Verbänden und logischen Strukturen ([24, pp.]) sehr problematisch, da dieser sich keineswegs mit operativ-logischen Strukturen beschäftigt.

Ich halte es deswegen zunächst für angebracht, die beim operativen Zugang zur Logik benutzten Begriffe so präzise wie möglich zu definieren und zwar in strenger Anlehnung an die bekannten Begriffe beim Aufbau der (nicht-operativen) formalen Logik. Hierbei halte ich mich in §2.1. und §2.2. an van Fraassen [19], jedoch gehen diese Definitionen meist auf Tarski zurück und dürfen als "allgemein üblich" bezeichnet werden. In §2.3. und §2.4. werde ich dann analoge Begriffe bei einem operativen Zugang zu Logik und formaler Sprache definieren. Es sei noch bemerkt, daß ich "algebraische Struktur" unpräzisiert, d.h. nicht als Spezialfall einer Relationsstruktur (vgl. §3.), benutze.

3. Formale Sprachen im operativen Sinn

- (3.0) Bemerkung: (i) Beim Aufbau einer formalen Sprache sei vorausgesetzt, daß bereits eine Sprache existiert. Bei der Konstruktion einer ersten formalen Sprache (besser: einer formalen Sprache der ersten Generation), einer "Objektsprache", ist dies eine nicht-formale Sprache, eine "Umgangssprache". Zu jeder Objektsprache kann man dann eine "Metasprache" (eine formale Sprache der 2. Generation) konstruieren, dazu wieder eine "Metametasprache" usw..
- (ii) Ist eine Sprache S_1 der $(n+1)$ -ten Generation Metasprache zu einer Sprache S_2 der n -ten Generation, so heiße S_2 "Vorsprache von S_1 ".

- (3.1) Def.: Das Paar $Sy = \langle \langle \mathcal{E}, L \rangle, G \rangle$ heißt "operatives syntaktisches System" : $\Leftrightarrow$

$\mathcal{E}$ ist eine Menge von Sätzen der Vorsprache, für die im Rahmen der Vorsprache ein Kriterium für die Richtigkeit möglicher Beweise dieser Sätze existiert ("Beweisdefinitheit der elementaren Aussagen", vgl. [17, p. 488]),

L ist eine Menge (der "logischen Zeichen"),

G ist eine Menge von Vorschriften, die festlegen, wie mit Hilfe von Elementen aus $\mathcal{E}$ und L "Aussagen" gebildet werden.

- (3.2) Beispiele: (a) Ein "operatives syntakt. System $SyPL := \langle \langle \mathcal{E}, L \rangle, G \rangle$ der Aussagenlogik":

$\mathcal{E}$ ist eine Menge von Sätzen der Umgangssprache (z.B. "Ein Elektron, das sich in x^+ -Richtung bewegt, hat 'spin-up' in Richtung a in der y - z -Ebene"), für die ein Beweisverfahren existiert (z.B. ein Stern-Gerlach-Experiment ausgerichtet in Richtung a),

$L = \{ \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \}, \{ \}$ und G besagt:

- (i) Elemente aus $\mathcal{E}$ ("elementare Aussagen") sind Aussagen
- (ii) Sind A, B Aussagen, dann sind auch $A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B$ und $\neg A$ Aussagen

(iii) Ist A eine Aussage, so kann man statt A auch (A) schreiben

- (b) Beim "operativen syntakt. System $SyPL^0 := \langle \langle \mathcal{E}, L \rangle, G^0 \rangle$ der Aussagenlogik mit $\wedge$ und $\vee$ " gilt das gleiche wie bei $SyPL$, G^0 enthält aber ferner:

- (iv) $\wedge$ und $\vee$ sind Aussagen (das "Wahre" und das "Falsche")

- (3.3) Def.: Vereinbarungen darüber, wie zwischen zwei Gesprächspartnern, dem "Proponenten" und dem "Opponenten", ein "Dialog" um eine Aussage eines operativen syntakt. Systems zu führen ist, heißen "Dialogregeln".
- (3.4) Def.: Das Paar $Lo := \langle Sy, Dia \rangle$ heißt "operative (formale) Sprache" : $\Leftrightarrow$ Sy ist ein operatives syntakt. System und Dia ist eine Menge von Dialogregeln (die "dialogische Semantik der operativen Sprache")
- (3.5) Beispiel: Eine "operative Sprache über unbeschränkt verfügbare Aussagen" ist ein Paar $\langle SyPL, Dia_0 \rangle$, wobei SyPL ein syntakt. System der Aussagen-Logik (vgl. (3.2)) und Dia_0 die Menge der Regeln F1-F5 ("Rahmenregeln") und $A_{f1}-A_{fn}$ ("Argumentregeln") bei [7, pp. 243; die Bemerkungen über die Verfügbarkeit in den Argumentregeln sind in diesem Fall zu streichen!] ist.
- (3.6) Def.: Sei $Lo := \langle Sy, Dia \rangle$ eine operative Sprache, A eine Aussage des zugehörigen operativen syntakt. Systems.
- (i) "Der Proponent gewinnt den Dialog um A" : $\Leftrightarrow$ Der Opponent kann den Dialog nicht mehr fortsetzen (vgl. Regel F5 bei [7, p. 243])
 - (ii) $\vdash_{Dia} A$: $\Leftrightarrow$ "Der Proponent hat eine Gewinnstrategie für A" : $\Leftrightarrow$ Der Proponent gewinnt den Dialog um A gegen jede Argumentation des Opponenten.

4. Kalkülisierung einer operativen Sprache

- (4.1) Def.: (i) Ein Tripel $LK := \langle Sy, Gf, Sr \rangle$ heißt "Logikkalkül" : $\Leftrightarrow$
Sy ist ein operatives syntakt. System,
 $Gf \subset S$, wobei S die Menge der Aussagen von Sy ist (die "Grundfiguren des Logikkalküls"),
Sr ist eine Menge, bestehend aus der Festlegung "Alle Grundfiguren sind Figuren" und aus den Anweisungen ("Schlußregeln"), nach denen "Figuren" gebildet werden.
- (ii) Sei Sy_V ein operatives syntakt. System, für das gilt:
Ist $f(A_1, \dots, A_n)$ eine aus $A_1, \dots, A_n$ gebildete Aussage und sind $B_1, \dots, B_n$ Aussagen, so ist auch $f(B_1, \dots, B_n)$ Aussage.
Sei $X := \{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Menge (die der "Aussagenvariablen").
In einer aus $A_1, \dots, A_n$ (verschiedene Aussagen von Sy_V) gebildeten Aussage $f(A_1, \dots, A_n)$ ersetze man $A_1, \dots, A_k$ ($k \in \{1, \dots, n\}$) durch $X_1, \dots, X_k \in X$. Das so entstandene Objekt $f(X_1, \dots, X_k, A_{k+1}, \dots, A_n)$ heißt "eine (aus einer Aussage entstandene) Aussageform (mit k Variablen)".
Ersetzt man umgekehrt in einer Aussageform $f(X_1, \dots, X_k, A_{k+1}, \dots, A_n)$ die Variablen X_i ($i=1, \dots, k$) durch Aussagen A_i von Sy_V , so erhält man eine "durch Belegung einer Aussageform entstandene Aussage $f(A_1, \dots, A_n)$ ".
- (iii) Ein Tripel $LKV := \langle Sy_V, \langle Gf_0, Gf_1 \rangle, Sr \rangle$ heißt "Logikkalkül mit Variablen" : $\Leftrightarrow$
 Sy_V ist ein operatives syntakt. System wie in (ii),
 $Gf_0 \subset S$, wobei S die Menge der Aussagen von Sy_V ist (die "Grundfiguren des Logikkalküls"),
 $Gf_1 \subset AF$, wobei AF die Menge der Aussageformen von Sy_V ist (die "Grundfiguren mit Variablen des Logikkalküls"),
Sr ist eine Menge wie in (i).
- (iv) Sei A eine Aussage des operativen syntakt. Systems von LK (bzw. eine aus einer Figur von LKV durch Belegung entstandene Aussage).
 $\vdash A : \Leftrightarrow$ "A ist im Kalkül ableitbar" : $\Leftrightarrow$ A ist eine Figur von LK (bzw. LKV). Bei Grundfiguren schreibt man statt " $\vdash$ " auch " $\rightarrow$ ".

- (4.2) Def.: Sei Lo eine operative Sprache, LK (bzw. LKV) ein Logikkalkül (bzw. ein Logikkalkül mit Variablen). LK (bzw. LKV) heißt
- (i) "konsistent bzgl. Lo" : $\Leftrightarrow (\vdash A \rightarrow \text{Dia } A)$ für alle Aussagen A des operativen syntakt. Systems von LK (bzw. LKV)
- (ii) "vollständig bzgl. Lo" : $\Leftrightarrow (\text{Dia } A \rightarrow \vdash A)$ für alle Aussagen A des operativen syntakt. Systems von L.

(4.3) Beispiele: (a) Ein "Kalkül der intuitionistischen Aussagenlogik"

ist ein Logikkalkül der Variablen, wobei
 $Sy_V = Sy_{PL}$ (vgl. (3.2)) , $Gf_0 = \emptyset$, $Gf_1 = \{(1.1.), \dots, (5.1.)\}$ mit
 $(1.1.) \rightarrow X \rightarrow X$ (3.2.) $\rightarrow Y \rightarrow X \vee Y$
 $(2.1.) \rightarrow X \wedge Y \rightarrow X$ (4.1.) $\rightarrow X \wedge (X \rightarrow Y) \rightarrow Y$
 $(2.2.) \rightarrow X \wedge Y \rightarrow Y$ (5.1.) $\rightarrow \neg (X \wedge \neg X)$
 $(3.1.) \rightarrow X \rightarrow X \vee Y$

Sr: (i) Alle Grundfiguren sind Figuren

(ii) (1.2.) Sind $X \rightarrow Y$ und $Y \rightarrow Z$ Figuren, dann auch $X \rightarrow Z$

kurz: $X \rightarrow Y \ \& \ Y \rightarrow Z \Rightarrow X \rightarrow Z$

(2.3.) $Z \rightarrow X \ \& \ Z \rightarrow Y \Rightarrow Z \rightarrow X \wedge Y$

(3.3.) $X \rightarrow Z \ \& \ Y \rightarrow Z \Rightarrow X \vee Y \rightarrow Z$

(4.2.) $X \wedge Y \rightarrow Z \Rightarrow Y \rightarrow (X \rightarrow Z)$

(5.2.) $\neg (X \wedge Y) \Rightarrow Y \rightarrow \neg X$

Es gilt []: Ein Kalkül der intuitionist. Aussagenlogik
 ist konsistent und vollständig bzgl. einer operativen Sprache
 $\langle Sy_{PL}, Dia_0 \rangle$ (vgl. (3.5)).

(b) Ein "Kalkül der vollen Quantenlogik" ist ein Logikkalkül LKV_0 mit Variablen mit:

$Sy_V = Sy_{PL}^0$ (vgl. (3.2)(b)) , $Gf_0 = \emptyset$,

$Gf_1 = \{(0.1.), (1.1.), \dots, (5.4.)\}$ mit (1.1.)-(4.1.) wie in (a),

ferner: (0.1.) $\rightarrow V \rightarrow \neg \perp$ (5.0.) $\rightarrow \perp \rightarrow X$

(5.0!) $\rightarrow X \rightarrow V$ (5.4.) $\rightarrow \neg V \rightarrow X \vee \neg X$

Sr: (i) und (ii) (1.2.)-(3.3.) wie in (a), ferner gehören zu

(ii): (4.2.) $X \wedge Z \rightarrow Y \Rightarrow (X \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Y)$

(4.3.) $X \rightarrow (Y \rightarrow X) \Rightarrow Y \rightarrow (X \rightarrow Y)$

(4.4.) $Y \rightarrow (X \rightarrow Y) \ \& \ Z \rightarrow (X \rightarrow Z) \Rightarrow (Y * Z) \rightarrow (X \rightarrow (Y * Z))$

mit $* \in \{\wedge, \vee, \neg\}$

(5.2.) $(X \wedge Z) \rightarrow \perp \Rightarrow (X \rightarrow Z) \rightarrow \neg X$

(5.3.) $X \rightarrow (Y \rightarrow X) \Rightarrow \neg X \rightarrow (Y \rightarrow \neg X)$

(4.4) Def.: Sei $Lo = \langle Sy, Dia \rangle$ eine operative Sprache und $LK = \langle Sy, Gf, Sr \rangle$
 (bzw. $LKV = \langle Sy_V, \langle Gf_0, Gf_1 \rangle, Sr \rangle$) ein Logikkalkül (bzw. ein Logikkalkül mit Variablen).

Dia heißt "eine Interpretation von LK (bzw. LKV)" : $\Leftrightarrow$

LK (bzw. LKV) ist konsistent und vollständig bzgl. Lo .

Algebraische Strukturen

(1) Def.: (i) Sei A eine Menge. Eine Menge B heißt "Relation der Ordnung n auf A " : $\Leftrightarrow B \subset (\mathcal{P}(A))^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

(ii) Ein Paar $\langle A, R \rangle$ heißt "Relationsstruktur" : $\Leftrightarrow$
 A ist eine Menge (das "Universum" der Rel.struktur),
 $R = \{R_i^{1(i)} \mid i, 1(i) \in \mathbb{N}\}$, wobei $R_i^{1(i)}$ eine Relation der Ordnung $1(i)$ auf A ist.

(2) Beispiele: zu (i): Jede $(n-1)$ -stellige Operation $f: A^{n-1} \rightarrow A$ auf A ($n \in \mathbb{N}$) ist eine Relation der Ordnung n auf A .

zu (ii): (a) Ein "Verband L_Q der Teilräume eines Hilbert-Raums":

Sei H ein Hilbert-Raum, $V(H)$ die Menge der Teilräume von H ,
ferner seien die folgenden Relationen auf $V(H)$ gegeben:

0-stellige Operation: $\{\{0\}, H\}$,

1-stellige Operation: $\{\langle A, \neg A \rangle \mid A \in V(H)\}$, wobei
 $\neg A := \{f \in H \mid (f, g) = 0 \ \forall g \in A\} \in V(H)$ ist,

2-stellige Operation: $\{\langle A, B, A \wedge B \rangle \mid A, B \in V(H)\}$, wobei
 $A \wedge B := \{f \in H \mid f \in A \cap B\} \in V(H)$ ist,

2-stellige Operation: $\{\langle A, B, A \vee B \rangle \mid A, B \in V(H)\}$, wobei $A \vee B := LH(M)$ ist
($LH(M)$ steht hierbei für den kleinsten, die
Menge $M := \{h \in H \mid \exists_{\alpha, \beta \in \mathbb{C}} \exists_{f \in A} \exists_{g \in B} h = \alpha f + \beta g\}$ enthalten-
den Teilraum von H),

Relation der Ordnung 2: $\{\langle A, B \rangle \mid A \subseteq B \text{ und } A, B \in V(H)\}$.

Für die so entstandene Relationsstruktur kann man nun gewisse
Sätze beweisen ((1.1)-(5) bei [20, p.4/5]), so daß - per def.! -
diese Relationsstruktur ein "orthokomplementärer quasimodularer
Verband mit 0 und 1" ist.

(b) Ein "durch einen Kalkül der vollen Quantenlogik induzierte
Aussagen-P-Verband L_Q " (Def.: Ein P-Verband unterscheidet si-
von einem Verband dadurch, daß zwar nicht die Gültigkeit der
Identitivität bewiesen, wohl aber eine "Gleichheit" definiert
werden kann, mit der dann auch die entsprechenden weiteren
Gesetze, in denen eine Gleichheit vorkommt, zu beweisen sind.)

Sei LKV_Q ein Kalkül der vollen Quantenlogik (vgl. (4.3)(b)),
sei A die Menge der Aussagen des operativen syntakt. Systems Sy_V
von LKV_Q . Auf A seien die folgenden Relationen gegeben:

0-stellige Operation: $\{\wedge, \vee\}$

1-stellige Operation: $\{\langle B, \neg B \rangle \mid B \in A\}$

2-stellige Operation: $\{\langle B, C, B \wedge C \rangle \mid B, C \in A\}$

2-stellige Operation: $\{ \langle B, C, B \vee C \rangle \mid B, C \in A \}$

Relation der Ordnung 2: $\{ \langle B, C \rangle \mid B, C \in A \text{ und } \vdash (\forall \rightarrow (\neg B \vee (B \wedge C))) \}$.

Für die so entstandene Relationsstruktur kann man nun gewisse Sätze beweisen (vgl. [20]), so daß - per def.! - diese Relationsstruktur ein "orthokomplementärer quasimodularer P-Verband mit 0 und 1" ist.

Statt (2)(b):

- (3) Def.: Sei LKV_Q ein Kalkül der vollen Quantenlogik, und sei A die Menge der Aussagen des operativen syntaktischen Systems Sy_V von LKV_Q .
Die wie folgt definierte Relation $\sim \subseteq A \times A$ heißt "logische Äquivalenz":
 $B \sim C : \Leftrightarrow (\vdash B \rightarrow C \text{ und } \vdash C \rightarrow B)$

(4) Hilfssatz: $\sim$ ist Äquivalenzrelation

(5) Hilfssatz: Sei $[B] \in A/\sim$ mit $B \in A$ als Repräsentant.

- (i) $([B] = [B'] \text{ und } [C] = [C']) \Rightarrow [B \wedge C] = [B' \wedge C']$
(ii) " " $\Rightarrow [B \vee C] = [B' \vee C']$
(iii) $[B] = [B'] \Rightarrow [\neg B] = [\neg B']$

(6) Hilfssatz: Auf $A/\sim$ werden durch folgende Vorschriften Operationen definiert:

$$\begin{aligned} \wedge : A/\sim \times A/\sim &\longrightarrow A/\sim \\ ([B], [C]) &\longrightarrow [B \wedge C] =: [B] \wedge [C] \\ \vee : A/\sim \times A/\sim &\longrightarrow A/\sim \\ ([B], [C]) &\longrightarrow [B \vee C] =: [B] \vee [C] \\ \neg : A/\sim &\longrightarrow A/\sim \\ [B] &\longrightarrow [\neg B] =: \neg [B] \end{aligned}$$

(7) Hilfssatz (Quasimodularität): Es gilt

$$([B] \leq [C] \text{ und } [D] \leq \neg [C]) \Rightarrow [C] \wedge ([B] \vee [D]) = [B]$$

(8) Hilfssatz: Die wie folgt definierte Relation $\leq \subseteq A/\sim \times A/\sim$ ist eine Ordnungsrelation auf $A/\sim$:

$$[B] \leq [C] : \Leftrightarrow \neg [B] \vee ([B] \wedge [C]) = [B]$$

(9) Hilfssatz: (i) $\sup(\{[B], [C]\}) = [B] \vee [C]$
(ii) $\inf(\{[B], [C]\}) = [B] \wedge [C]$

(10) Hilfssatz: $A/\sim$ ist orthokomplementär (mit $[V] =: 1$ und $[A] =: 0$)

(11) Satz: $\langle A/\sim, \wedge, \vee, \neg, \leq, 0, 1 \rangle$ ist ein orthokomplementärer quasimodularer Verband.

Kommentar

Nach meiner vorangehenden präzisen Einführung der Begriffe ergibt sich folgendes Bild:

(1) Ausgehend von Beobachtungen wurde in den 20er Jahren nach der in den Naturwissenschaften üblichen Devise 'trial and error' ein mathematischer Formalismus F entwickelt, der "durch gewisse Korrespondenzregeln K in Beziehung zur Realität steht" (vgl. [21, p.]); Grundlage von F ist ein (zum betrachteten System gehöriger) Hilbert-Raum H . Diese Theorie erwies sich insofern als "richtig", als sie einen großen Teil der mikroskopischen Phänomene der Realität recht genau beschreibt. Untersucht man nun die algebraische Struktur der Menge der Teilräume eines Hilbert-Raums, so stellt man fest, daß sie ein Verband L_q mit gewissen Eigenschaften ist. Kurz: Man findet eine spezielle algebraische Struktur mit besonderen Eigenschaften in einer "empirisch gewonnenen" Theorie.

(2) Ausgehend von der Frage nach den Bedingungen, unter denen wissenschaftliches Sprechen möglich ist, fand Mittelstaedt einen Logikkalkül Q , der gewisse(!) "Ähnlichkeiten" mit einem orthokomplementären quasimodularen Verband hat. Kurz: Man findet eine logische Struktur bei der Betrachtung einer formalen Sprache, die den einfachsten unverzichtbaren Regeln sinnvollen Argumentierens genügt.

(3) Die Verbindung zwischen algebraischen Strukturen einerseits und sprachlich-logischen Strukturen andererseits kann nun dadurch hergestellt werden, daß man mit Hilfe des Logikkalküls auf der Menge der Aussagen (des syntakt. Systems) einen P -Verband L_Q induziert, der eine zum Verband L_q der Teilräume eines Hilbert-Raums ähnliche algebraische Struktur aufweist. Auch die besonderen Eigenschaften der Orthokomplementarität und der Quasimodularität liegen in beiden Fällen vor. Weitere Eigenschaften des L_q , wie Atomizität und σ -Vollständigkeit, konnten bisher nicht in einem durch sprachlich-logische Strukturen induzierten (P -)Verband wiedergefunden werden. Trotzdem, so glaube ich, ist man berechtigt, den engen Zusammenhang der Strukturen, wie er im folgenden Schema noch einmal dargestellt ist, als "logische Interpretation" des Verbandes L_q zu bezeichnen.

algebraische Strukturen

sprachlich-logische Strukturen

QM $\supset$ Hilbert-Raum
resp. $V(H)$

{Aussagen}

oper. syntakt. System

$\langle Gf, Sr \rangle$

dialog. Semantik

Interpretation

$\mathcal{L}_q$ Verband der
Teilräume
mit
{Eigenschaften}

Aussagen-P-
Verband $\mathcal{L}_q$
mit
{Eigenschaften}

Logikkalkül
mit
{ $\vdash A$ }

konsistent
vollständig

operative Sprache
mit
{ $\overline{\text{Dia}} A$ }

$\supset$

$\leftarrow$ $\rightarrow$

Teil II

Eine operative modale Metasprache

Zum Begriff "notwendige Aussage"

Ich möchte hier nicht die historische Entwicklung der Auffassung darüber, wann eine Aussage "notwendig" heißen kann, diskutieren; hierzu sei etwa auf Lorenzen [18] verwiesen.

Vielmehr werde ich zunächst eine naive Auffassung von "Notwendigkeit einer Aussage" auf verschiedene Arten interpretieren, nämlich:

Sei A eine Aussage, für die ein Kriterium B existiert, nach dem die Wahrheit oder Falschheit von A bewiesen werden kann ("Beweisdefiniertheit"; vgl. I, §2 (3.1)!).

Definitionsversuch: Die Aussage A heißt "notwendig" : $\Leftrightarrow$

(1)

A läßt sich immer als wahr beweisen.

(a) Fall 1: Das Kriterium B beinhaltet ein physikalisches Experiment, dessen Ausgang (mit-)entscheidend für die Feststellung der Wahrheit von A ist.

(i) Das Wort "immer" in (1) heißt, daß das Experiment zu jedem Zeitpunkt (und an jedem Ort) ein positives Ergebnis liefert. Diese Interpretation ist natürlich unbrauchbar, da man z.B. das Experiment nicht in der Vergangenheit ausführen kann.

(ii) Das Wort "immer" in (2) wird wie folgt eingeschränkt: Derjenige, der die Notwendigkeit von A behauptet, muß so oft - aber nur endlich oft! - die Wahrheit von A beweisen, wie sein Gesprächspartner es verlangt. Solche Aussagen bezeichnet man gewöhnlich als Naturgesetze bzw. als solche, die sich mit Naturgesetzen formulieren lassen, nicht aber als "notwendige Aussagen".

Damit ist aber bereits eine grundsätzliche subjektive(!) Entscheidung getroffen dafür, daß eine Aussage A (wenn überhaupt, dann) nur "notwendig" heißen kann im

(b) Fall 2: Das Kriterium B beinhaltet kein physikalisches Experiment.

Dann wäre (1) zu interpretieren als: "Eine Aussage A heißt notwendig, wenn sie logisch wahr ist". Ganz abgesehen davon, daß sich die Gesprächspartner einigen müßten, welche Logik man zugrunde legen will - dies würde in das Kriterium B eingehen -, wäre bei dieser Interpretation der Begriff "notwendig" gänzlich überflüssig; er könnte durch "logisch wahr" ersetzt werden.

(c) Einen neuen Weg schlug Lorenzen 1955 ein [1], indem er den Begriff "notwendig relativ zu einem Wissen W" einführte, der sich auch bei der

Betrachtung physikalischer Aussagen benutzen läßt.

Bedenkt man, daß ein Projektionsoperator P_A auf einen Teilraum M_A eines Hilbert-Raums hermitesch ist mit den Eigenwerten 0 und 1, also eine Observable mit den Meßwerten 0 und 1 repräsentiert, so wird man definieren ([3], [11]):

Def.1: Ein physikalisches System S hat die Eigenschaft $E_A : \Leftrightarrow$
Die Messung der zu P_A gehörigen Observablen am System S
liefert den Wert 1.

Spezialfall: Ist bekannt, daß S im (reinen) Zustand $|\varphi\rangle$ vorliegt, so gilt:

S hat die Eigenschaft $E_A : \Leftrightarrow P_A |\varphi\rangle = |\varphi\rangle \Leftrightarrow |\varphi\rangle \in M_A$

Def.2: (i) Eine "elementare physikalische Aussage A " ist eine Behauptung der Art: "Ein System S hat die Eigenschaft E_A ".

Spezialfall: Ist bekannt, daß S im (reinen) Zustand $|\varphi\rangle$ vorliegt, so ist eine elementare physikalische Aussage A über dieses System von der Art " $|\varphi\rangle$ liegt in M_A ".

(ii) "Physikalische Aussagen" entstehen durch sinnvolle Zusammensetzung (i.S.eines syntakt. Systems) von elementaren physikalischen Aussagen.

Es sei nun vorausgesetzt, daß das betrachtete System S eine Eigenschaft E_W besitzt. Bekanntlich genügt dies nicht, um die Werte aller meßbaren Größen des Systems S im Rahmen der Quantentheorie zu bestimmen, selbst dann nicht, wenn $M_W = [\varphi]$ ein eindimensionaler Teilraum ist (vgl. dazu [11, pp. 104]); d.h. "Das Wissen W ist immer unvollständig".

Man kann nun fragen: Welche Aussagen sind notwendig relativ zu W ?

Nach der Lorenzenschen Interpretation [6, p. 113/14] hieße das: Welche Aussagen folgen rein logisch aus W ? Im Formalismus der Objektsprache (vgl. Teil I) bedeutet dies: Für welche A ist $W \rightarrow A$ in Q ableitbar?

Die Beantwortung dieser Frage hängt natürlich von der speziellen Form von W ab.

Fragt man dagegen "Für welche A ist $W \rightarrow A$ für alle möglichen W in Q ableitbar?", so ist die Antwort nicht mehr von W abhängig und man könnte definieren:

Def.3: Eine Aussage heißt "notwendig" : $\Leftrightarrow W \rightarrow A$ ist für alle W in Q ableitbar.

Das bedeutet aber: A notwendig $\Leftrightarrow V \rightarrow A$ ist in Q ableitbar $\Leftrightarrow A$ ist in Q ableitbar.

Demnach führt diese Definition in der Objektsprache wieder zu nichts Neuem.

Diese unbefriedigende Situation ändert sich, wenn man zur Objektsprache eine Metasprache konstruiert; hierbei taucht natürlich sofort die Frage auf, nach welchen Kriterien Syntax und Semantik dieser Metasprache aufzubauen sind.

Wie in I.§2.(3.0)-(3.1) erwähnt, gehen die Vokabeln der Sprache, also die "elementaren Meta-Aussagen", unmittelbar aus der Aussagenmenge der Objektsprache hervor. Sei also A eine objektsprachliche Aussage; dann soll ein Satz der Form "A ist objektsprachlich wahr", d.h. "Der Proponent hat in der Objektsprache eine Gewinnstrategie für A", eine elementare Meta-Aussage sein. Da wir die Mittelstaedt-Stachowsche Objektsprache zugrunde legen wollen, ist dieser Satz gleichbedeutend mit: "A ist im Kalkül der (effektiven) Quantenlogik ableitbar", d.h. " $\vdash_{\text{eff}} A$ " bzw. " $V \leq A$ ".

Im Hinblick auf eine mögliche physikalische Interpretation wird dieser Sachverhalt etwas anders formuliert: Statt der objektsprachlichen Aussage A wählen wir solche der Form $W \rightarrow B$, wobei W und B beliebige objektsprachliche Aussagen sind; somit sind nun Sätze der Art " $W \rightarrow B$ ist objektsprachlich wahr" bzw. " $W \leq B$ " elementare Meta-Aussagen. Für $W = V$ erfaßt man damit auch die oben erwähnten Meta-Aussagen " $V \leq A$ ".

Die angestrebte physikalische Interpretation ist die, daß W mit einem Wissen über ein physikalisches System identifiziert wird, wie es etwa durch Messungen verträglicher Observabler, d.h. durch die Bestimmung objektiver Eigenschaften, an diesem System entsteht. Wie bereits weiter oben ausgeführt, bedeutet " $W \leq B$ " dann: "Bei Kenntnis des Wissens W über das physikalische System S folgt logisch die Aussage B".

Die logischen Zeichen der metasprachlichen Syntax seien analog zur Objektsprache neben den Klammern die Funktoren $\wedge$, $\vee$ und $\Rightarrow$. Sehr wichtig ist die Feststellung, daß bei der von uns zu konstruierenden "modalen" Metasprache - im Gegensatz zu den üblichen modalen Sprachen (vgl. etwa [25]!) - der modale Charakter nicht in der Syntax durch die Einführung eines modalen Funktors Δ oder ∇ zum Ausdruck kommt!

Mittels der obigen Funktoren werden nur solche elementaren Meta-Aussagen zusammengesetzt, die sich entweder auf ein (beliebiges, aber festes) W oder auf V beziehen; d.h. man geht aus von einem bestimmten Wissen W über ein physikalisches System S, berücksichtigt darüber hinaus aber auch objektsprachlich formal-wahre Aussagen, also Meta-Aussagen der Form $V \leq A$. Schließt man das Letztere aus, so erhält man nur "(in W) homogene Meta-Aussagen".

Die Beweisdefinitheit der elementaren Meta-Aussagen ist gesichert durch

die Möglichkeit, die behauptete Ableitbarkeit in Q_{eff} nachzuprüfen, wodurch über Wahrheit oder Falschheit der elementaren Meta-Aussagen entschieden werden kann. Die Frage nach der "Wahrheit" der zusammengesetzten Meta-Aussagen führt auf das Problem, wie die Semantik der zu konstruierenden Meta-Sprache zu wählen ist, wobei jetzt der modale Charakter der Sprache zum Ausdruck kommen muß.

Zunächst sei festgehalten, daß in einem Dialog über Meta-Aussagen Verfügbarkeiten der (Teil-)Aussagen im Gegensatz zur Objektsprache keine Rolle spielen; man kann eben davon ausgehen, daß eine einmal in Q_{eff} abgeleitete Figur immer wieder in Q_{eff} ableitbar ist.

Die einfachste Form der metasprachlichen Dialogregeln wäre die, daß im Dialog kein Bezug auf den Inhalt der elementaren Meta-Aussagen genommen werden darf; man interessiert sich also nur für formal-wahre Meta-Aussagen. Wegen der unbeschränkten Verfügbarkeit der Teilaussagen führt dies bekanntlich bei einer Kalkülisierung zur effektiven Logik.

Uns interessieren aber solche Meta-Aussagen, die für jedes W vom Proponenten verteidigt werden können, d.h. solche, die unabhängig vom Wissen über ein physikalisches System "wahr", also im Lorenzenschen Sinne "notwendig" sind. Dies sind aber nicht nur die formal-wahren Meta-Aussagen; der Proponent muß im Dialog vielmehr die Möglichkeit haben, vom Opponenten als objektsprachlich wahr Behauptetes zu übernehmen, daraus objektsprachlich Folgerungen zu ziehen, um diese Folgerungen dann in die Meta-Sprache zu übernehmen. Genau dieser Sachverhalt wird in einer Dialogregel festgehalten, die so gestaltet ist, daß auch bei Benutzung dieser Dialogregel nicht explizit auf W Bezug genommen wird. Diese Regel kann im homogenen Fall, in dem nur elementare Meta-Aussagen der Form " $W \leq B$ " vorkommen, vereinfacht werden durch den

"Satz von Aristoteles" (vgl. [6, p.115] und [9, p.11]):

In der Sprache der effektiven Quantenlogik hat der Proponent eine Gewinnstrategie für die Regel $W \rightarrow A_1 \ \& \dots \& \ W \rightarrow A_n \leadsto W \rightarrow B$ genau dann wenn er eine Gewinnstrategie für die Aussage $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ hat.

Beweis: " $\Rightarrow$ ": Wähle $W =: W_0 = A_1 \wedge \dots \wedge A_n$; dann ist bekanntlich $W_0 \rightarrow A_i$ ($i=1, \dots, n$), also nach Voraussetzung auch $W_0 \rightarrow B$ in Q_{eff} ableitbar.

" $\Leftarrow$ ": Nach Voraussetzung ist

$$\begin{array}{c|c} A_1 & \\ \vdots & \\ A_n & \end{array} \quad [\quad]$$
 eine Gewinnstellung für P.

Daher gewinnt P jeden Dialog um die Regel wie folgt:

-n.	$W \rightarrow A_1$	
-n+1.	$W \rightarrow A_2$	
$\vdots$	$\vdots$	
-1.	$W \rightarrow A_n$	
0.	$[]$	$W \rightarrow B$
1.	$W (0.)$	$[]$
2.	$A_1 \langle -n. \rangle$	$W (-n.)$
3.	$A_2 \langle -n+1. \rangle$	$W (-n+1.)$
4.	$A_3 \langle -n+2. \rangle$	$W (-n+2.)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n+1.	$A_n \langle -1. \rangle$	$W (-1.)$
n+2.		$B \langle 0. \rangle$

q.e.d

Da bei notwendigen Meta-Aussagen das W keine Rolle spielt, kann man bei solchen Aussagen statt " $W \leq B$ " einfach "dB" schreiben ("d" soll an " Δ " erinnern!). Im homogenen Fall ist es möglich, von vornherein nur elementare Meta-Aussagen der Form "dB", hier " ΔB " genannt, zu verwenden wodurch sich eine spätere besondere Kennzeichnung der notwendigen Meta-Aussagen erübrigt. Aber auch hier muß mit Nachdruck darauf hingewiesen werden, daß das " Δ -Symbol" zwar im Rahmen der Syntax, aber nicht - wie sonst bei modalen Sprachen üblich - als Funktor eingeführt wird!

Aufbau einer formalen Meta-Sprache

1. Syntax

(1.1) Def.: Sei $\mathcal{L}$ die Menge der objektsprachlichen Aussagen und

$$\mathcal{E} := \{W \leq B\}_{W, B \in \mathcal{L}}.$$

$\bar{a} = W \leq B \in \mathcal{E}$ heißt "elementare Meta-Aussage",

W heißt "O-Prmise von $\bar{a}$ ", B heißt "O-Konklusion von $\bar{a}$ "

(1.2) Beispiele zu I.§2.(3.1):

(a) Ein "operatives syntakt. System einer Meta-Sprache" ist ein

Paar $\text{Sym} := \langle \langle E, L \rangle, G \rangle$, wobei

$E \subseteq \mathcal{L}$ (vgl. (1.1)), $L := \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \cdot, ()\}$ und

G besagt: Die Menge der "Aussagen" ("Meta-Aussagen") von Sym ist wie folgt rekursiv definiert:

(i) Elemente aus E sind Aussagen.

(ii) $\neg$ und $\vee$ sind Aussagen.

(iii) Sind $f_1(W, V)$ und $f_2(W, V)$ Aussagen, deren elementare Meta-Aussagen alle W oder V als O-Prmise haben, dann sind auch

(α) $\neg f_1(W, V)$ und

(β) $f_1(W, V) * f_2(W, V)$ mit $* \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ Aussagen.

(b) Ein "operatives syntaktisches System einer homogenen modalen

Meta-Sprache" ist ein Paar $\text{SymM} := \langle \langle F, L \rangle, G_m \rangle$, wobei

$F = \{\Delta A \mid A \in L \subseteq \mathcal{L} \text{ objektsprachl. Aussage}\}$ ("elementare Meta-Aussagen"),

$L := \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \cdot, ()\}$ und

G_m besagt: Die Menge der "Aussagen" ("homogene modale Meta-Aussagen") von SymM ist wie folgt rekursiv definiert:

(i) Elemente aus F sind Aussagen.

(ii) $\neg$ und $\vee$ sind Aussagen.

(iii) Sind $\bar{A}$ und $\bar{B}$ Aussagen, dann sind auch $\neg \bar{A}$ und $\bar{A} * \bar{B}$ mit $* \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ Aussagen.

2. Semantik

(1.3) Beispiele zu I.§2.(3.3):

(a) Die "Dialogregeln für den modalen Meta-Dialog" bestehen aus den folgenden Rahmen- und Argument-Regeln:

Aufbau einer formalen Meta-Sprache

1. Syntax

(1.1) Def.: Sei $\mathcal{L}$ die Menge der objektsprachlichen Aussagen und

$$\mathcal{E} := \{W \leq B\}_{W, B \in \mathcal{L}}.$$

$\bar{a} = W \leq B \in \mathcal{E}$ heißt "elementare Meta-Aussage",

W heißt "O-Prmise von $\bar{a}$ ", B heißt "O-Konklusion von $\bar{a}$ "

(1.2) Beispiele zu I.§2.(3.1):

(a) Ein "operatives syntakt. System einer Meta-Sprache" ist ein

Paar $\text{Sym} := \langle \langle E, L \rangle, G \rangle$, wobei

$E \subseteq \mathcal{E}$ (vgl. (1.1)), $L := \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \cdot, ()\}$ und

G besagt: Die Menge der "Aussagen" ("Meta-Aussagen") von Sym ist wie folgt rekursiv definiert:

(i) Elemente aus E sind Aussagen.

(ii) $\neg$ und $\vee$ sind Aussagen.

(iii) Sind $f_1(W, V)$ und $f_2(W, V)$ Aussagen, deren elementare Meta-Aussagen alle W oder V als O-Prmise haben, dann sind auch

(α) $\neg f_1(W, V)$ und

(β) $f_1(W, V) * f_2(W, V)$ mit $* \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ Aussagen.

(b) Ein "operatives syntaktisches System einer homogenen modalen

Meta-Sprache" ist ein Paar $\text{Sym}_m := \langle \langle F, L \rangle, G_m \rangle$, wobei

$F = \{\Delta A \mid A \in L \subseteq \mathcal{L} \text{ objektsprachl. Aussage}\}$ ("elementare Meta-Aussagen"),

$L := \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \cdot, ()\}$ und

G_m besagt: Die Menge der "Aussagen" ("homogene modale Meta-Aussagen") von Sym_m ist wie folgt rekursiv definiert:

(i) Elemente aus F sind Aussagen.

(ii) $\neg$ und $\vee$ sind Aussagen.

(iii) Sind $\bar{A}$ und $\bar{B}$ Aussagen, dann sind auch $\neg \bar{A}$ und $\bar{A} * \bar{B}$ mit $* \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ Aussagen.

2. Semantik

(1.3) Beispiele zu I.§2.(3.3):

(a) Die "Dialogregeln für den modalen Meta-Dialog" bestehen aus den folgenden Rahmen- und Argument-Regeln:

Argument-Regeln für den Meta-Dialog

$A_f(1)$	Meta-Aussage	Angriff	Verteidigung
a)	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	1? 2?	$\overline{A}$ $\overline{B}$
b)	$\overline{A} \vee \overline{B}$	?	$\overline{A}$ oder $\overline{B}$
c)	$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$
d)	$\neg A$	A	
e)	$W \leq B$	$W \leq B?$	R1
f)	$V \leq B$	$V \leq B?$	R2

Dabei bedeutet

R1: Ableitung der Regel

$V \rightarrow A_1, \dots, V \rightarrow A_m, W \rightarrow A_{m+1}, \dots, W \rightarrow A_n \Rightarrow W \rightarrow B$ in Q_{eff} ,
falls im Meta-Dialog vom Dialogpartner vorher bereits die
elementaren Meta-Aussagen $V \leq A_1, \dots, V \leq A_m, W \leq A_{m+1}, \dots, W \leq A_n$
behauptet wurden.

R2: Wie R1, aber mit $V \rightarrow B$ statt $W \rightarrow B$.

$A_f(2)$ a) Elementaraussagen dürfen in jeder Position des Dialogs behauptet werden.

b) O kann jede Elementaraussage verteidigen

$A_f(3)$ a) P darf Elementaraussagen höchstens n-mal übernehmen.

P darf die gleiche Aussage von O höchstens n-mal angreifen.

b) O darf Aussagen von P höchstens einmal angreifen. O muß sich entscheiden, ob er sich gegen einen Angriff verteidigt oder ob er selbst angreift. Wenn er sich verteidigt, hat er kein Recht zum Angriff mehr; wenn er angreift, hat er kein Recht zur Verteidigung mehr.

$A_f(4)$ Hat O $V \leq A_1, \dots, V \leq A_m, W \leq A_{m+1}, \dots, W \leq A_n$ behauptet, so hat P den Meta-Dialog gewonnen, falls er in Q_{eff} die Figur

$(\dots(A_1 \wedge A_2) \wedge \dots \wedge A_m) \leq \perp$ oder die Figur $(\dots(A_{m+1} \wedge A_{m+2}) \wedge \dots \wedge A_n) \leq \perp$
ableiten kann.

(b) Die "Dialogregeln für den homogenen modalen Meta-Dialog" bestehen aus den obigen Rahmen-Regeln und den folgenden Argument-Regeln:

$A_f(1)$ a)-d) wie in (a)

e) Meta-Aussage	Angriff	Verteidigung
ΔB	$\Delta B?$	R

Dabei bedeutet

R: Ableitung der Figur $(\dots(A_1 \wedge A_2) \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$ in Q_{eff} , falls im Meta-Dialog vom Dialogpartner vorher bereits die elementaren Meta-Aussagen $\Delta A_1, \dots, \Delta A_n$ behauptet wurden.

$A_f(2)$ und $A_f(3)$ wie in (a)

$A_f(4)$ Hat O $\Delta A_1, \dots, \Delta A_n$ behauptet, so hat P den modalen Meta-Dialog gewonnen, falls er in Q_{eff} die Figur $(\dots(A_1 \wedge A_2) \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow \Delta$ ableiten kann.

(2.1a) Bemerkung: Die in (2.1) formulierten Dialog-Regeln sind solche für einen "materiellen Dialog", d.h. es dürfen elementare Aussagen angegriffen werden, die dann nur außerhalb des geführten Dialogs, nämlich im Rahmen der Vorsprache, verteidigt werden können. Verzichtet man auf diese Möglichkeit, führt man also nur "formale Dialoge", so lauten die Argumentregeln bekanntlich (vgl. Dia_0 in I, §2.(3.5)):

$A_f(1)$ a)-d) und $A_f(3)$ wie in (2.1)(a)

$A_f(2)$ a) O darf Elementaraussagen in jeder Position des Dialogs behaupten.

b) P darf Elementaraussagen behaupten, wenn sie vorher von O vorgegeben wurden.

c) Elementaraussagen sind nicht angreifbar.

Man sieht leicht ein, daß eine in diesem formalen Dialog von P verteidigbare Aussage, also eine "formal-wahre" Meta-Aussage, auch im obigen materiellen Dialog verteidigbar ist.

(2.2) Beispiele zu I.§2.(3.4):

(a) Eine "operative modale Meta-Sprache" ist ein Paar $\langle \text{SyM}, \text{Dia}_1 \rangle$ wobei SyM ein operatives syntakt. System einer Meta-Sprache (vgl.(1.2)(a)) und Dia_1 die Menge der Dialogregeln für den Meta-Dialog (vgl.(1.3)(a)) ist.

(b) Eine "operative homogene modale Meta-Sprache" ist ein Paar $\langle \text{SymM}, \text{Dia}_2 \rangle$, wobei SymM ein operatives syntakt. System einer modalen Meta-Sprache (vgl.(1.2)(b)) und Dia_2 die Menge der Dialogregeln für den modalen Meta-Dialog (vgl.(1.3)(b)) ist.

(2.3) Satz: Vor.: Sei $L = \langle \text{SyM}, \text{Dia}_1 \rangle$ eine oper. modale Meta-Sprache, $\mathcal{L}$ die Menge der objektsprachlichen Aussagen und $W, \tilde{W} \in \mathcal{L}$

Beh.: $\vdash_{\text{Dia}_1} f(W, V) \Rightarrow \vdash_{\text{Dia}_1} f(\tilde{W}, V)$

Bew.: Offensichtlich, da nach den Dialogregeln P bei der Verteidigung von $f(W, V)$ nicht auf die explizite Form von W zurückgreifen muß.

(2.4) Korollar: In einer oper. modalen Meta-Sprache hat P genau dann eine Gewinnstrategie für $f(W, V)$, wenn er für alle W eine Gewinnstrategie für $f(W, V)$ hat.

Hierdurch wird die folgende Definition nahegelegt:

(2.5) Def.: Sei L eine oper. modale Meta-Sprache und M die Menge der Meta-Aussagen von L ; $f(W, V) \in M$.

(i) $V \leq f(W, V) : \Leftrightarrow f(W, V)$ ist "notwendig" : $\Leftrightarrow \vdash_{\text{Dia}_1} f(W, V)$

(ii) Ist $f(W, V)$ notwendig, so schreibt man statt der elementaren Meta-Aussagen $W \leq B$ (bzw. $V \leq B$) in $f(W, V)$ kurz dB (bzw. $\vdash B$).

(iii) Statt $\vdash_{\text{Dia}_1} \bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ schreibt man auch $\bar{A} \leq \bar{B}$.

(2.6) Bemerkung: Benutzt man in der Argument-Regel $\bar{A}_f(4)$ Q statt Q_{eff} , so wird die Menge der notwendigen Meta-Aussagen vergrößert. Die Meta-Aussagen, die nicht bei Benutzung von Q_{eff} , wohl aber bei Benutzung von Q notwendig sind, sollen "fiktiv-notwendig" heißen.

3. Logikkalkül

- (3.1) Def.: Sei SyM (bzw. SymM) ein operatives syntakt. System einer Metasprache (bzw. einer homogenen modalen Metasprache). Sei $f(A_1, \dots, A_n)$ eine Meta-Aussage, die die objektsprachlichen Aussagen $A_1, \dots, A_n$ enthält. Ersetzt man $A_1, \dots, A_k$ ($k \in \{1, \dots, n\}$) durch Variable $X_1, \dots, X_k$, so erhält man eine "(Meta-) Aussageform (mit k objektsprachlichen(!) Observablen)".
- Es wird also die gleiche Bezeichnung wie für die nach I.§2.(4.1)(ii) entstehenden metasprachlichen Aussageformen benutzt!

(3.2) Beispiele zu I.§2.(4.1)(iii):

- (a) Ein "Kalkül der effektiven modalen Meta-Logik" ist ein Tripel $LKM := \langle \text{SyM}, Gf_1, Sr_1 \rangle$, wobei SyM ein operatives syntakt. System einer Metasprache (vgl. (1.2)(a)), Gf_1 die unten aufgeführte Menge der durch " $\Rightarrow$ " gekennzeichneten Meta-Aussageformen und Sr_1 die unten aufgeführte Menge von metasprachlichen Regeln ist.

Hierbei werden folgende Konventionen benutzt:

- (i) $K_{\text{eff}}(Q_{\text{eff}}) := Gf_1 \cup Sr_1$
- (ii) $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ sind Variable für Meta-Aussagen.
- (iii) A, B, C sind Variable für objektsprachliche Aussagen.
- (iv) "&" steht für "und", " $\Rightarrow$ " in Regeln für "wenn, dann"
- (v) " $\leq$ " steht für das 'letzte' " $\Rightarrow$ " in einer Meta-Aussage, d.h.: Statt z.B. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ wird $A \Rightarrow B \leq C$ geschrieben. Durch dieses Zeichen soll hervorgehoben werden, daß es sich bei der Meta-Aussage um eine Kalkül-Figur handelt.
- (vi) $g, h, \dots$ sind Variable für Kalkül-Figuren.
- (vii) $\vdash := \frac{}{Q_{\text{eff}}}$
- (viii) $g(d/\vdash)$ ist die folgendermaßen entstandene Kalkülfigur: Man ersetze in der durch eine Belegung der Variablen g entstandenen Figur jedes d durch ein $\vdash$!

- (0.1) $\Rightarrow \underline{V} \leq \neg \underline{\Lambda}$
 (1.1) $\Rightarrow \bar{A} \leq \bar{A}$
 (1.2) $\bar{A} \leq \bar{B} \ \& \ \bar{B} \leq \bar{C} \Rightarrow \bar{A} \leq \bar{C}$
 (2.1) $\Rightarrow \bar{A} \pi \bar{B} \leq \bar{A}$
 (2.2) $\Rightarrow \bar{A} \pi \bar{B} \leq \bar{B}$
 (2.3) $\bar{C} \leq \bar{A} \ \& \ \bar{C} \leq \bar{B} \Rightarrow \bar{C} \leq \bar{A} \pi \bar{B}$
 (3.1) $\Rightarrow \bar{A} \leq \bar{A} \vee \bar{B}$
 (3.2) $\Rightarrow \bar{B} \leq \bar{A} \vee \bar{B}$
 (3.3) $\bar{A} \leq \bar{C} \ \& \ \bar{B} \leq \bar{C} \Rightarrow \bar{A} \vee \bar{B} \leq \bar{C}$
 (4.1) $\Rightarrow \bar{A} \pi (\bar{A} \Rightarrow \bar{B}) \leq \bar{B}$
 (4.2) $\bar{A} \pi \bar{C} \leq \bar{B} \Rightarrow \bar{C} \leq \bar{A} \Rightarrow \bar{B}$
 (5.0) $\Rightarrow \underline{\Lambda} \leq \bar{A}$
 (5.0') $\Rightarrow \bar{A} \leq \underline{V}$
 (5.1) $\Rightarrow \bar{A} \pi \neg \bar{A} \leq \underline{\Lambda}$
 (5.2) $\bar{A} \wedge \bar{C} \leq \underline{\Lambda} \Rightarrow \bar{C} \leq \neg \bar{A}$

- (M0.1) $\Rightarrow d\underline{\Lambda} \leq \underline{\Lambda}$
 (M0.2) $\Rightarrow \underline{V} \leq d\underline{V}$
 (M0.3) $\Rightarrow d(A \rightarrow B) \leq dA \Rightarrow dB$
 (M0.4) $\Rightarrow dA \vee dB \leq d(A \vee B)$
 (M0.5) $\Rightarrow dA \pi dB \leq d(A \wedge B)$
 (M0.5') $\Rightarrow d(A \wedge B) \leq dA \pi dB$
 (M0.6) $\Rightarrow d(\neg A) \leq \neg dA$
 (M0.7) $\underline{V} \leq dA \Rightarrow dB \Rightarrow \underline{V} \leq d(A \rightarrow B)$
 (M0.7') $\underline{V} \leq d(A \rightarrow B) \Rightarrow \underline{V} \leq dA \Rightarrow dB$
 (M0.8) $\underline{V} \leq dA \vee dB \Rightarrow \underline{V} \leq d(A \vee B)$
 (M0.9) $\underline{V} \leq dA \pi dB \Rightarrow \underline{V} \leq d(A \wedge B)$
 (M0.9') $\underline{V} \leq d(A \wedge B) \Rightarrow \underline{V} \leq dA \pi dB$
 (M0.10) $\underline{V} \leq d(\neg A) \Rightarrow \underline{V} \leq \neg dA$
 (M3.3) $dA \leq dC \ \& \ dB \leq dC \Rightarrow d(A \vee B) \leq dC$
 (M4.2) $dA \pi dC \leq dB \Rightarrow d(A \rightarrow C) \leq d(A \rightarrow B)$
 (M4.3) $dA \leq d(B \rightarrow A) \Rightarrow dB \leq d(A \rightarrow B)$
 (M4.4) $dB \leq d(A \rightarrow B) \ \& \ dC \leq d(A \rightarrow C) \Rightarrow d(B * C) \leq d(A \rightarrow B * C)$
 (M5.2) $dA \pi dC \leq d\underline{\Lambda} \Rightarrow d(A \rightarrow C) \leq d(\neg A)$
 (M5.3) $dA \leq d(B \rightarrow A) \Rightarrow d(\neg A) \leq d(B \rightarrow \neg A)$

$$(P3.3) \quad \vdash A \leq \vdash C \ \& \ \vdash B \leq \vdash C \Rightarrow \vdash (A \vee B) \leq \vdash C$$

$$(P4.2) \quad \vdash A \wedge \vdash C \leq \vdash B \Rightarrow \vdash C \leq \vdash (A \rightarrow B)$$

$$(P5.0) \Rightarrow \forall \leq \vdash (A \rightarrow A)$$

$$(P5.1) \Rightarrow \forall \leq \vdash (A \wedge \neg A \rightarrow A)$$

$$(P5.2) \quad \forall \leq \vdash (A \wedge C \rightarrow A) \Rightarrow \vdash (A \rightarrow C) \leq \vdash (\neg A)$$

$$(Q6.1) \Rightarrow \vdash A \leq dA$$

$$(Q6.2) \Rightarrow \vdash (A \rightarrow B) \wedge dA \leq dB$$

$$(Q6.3) \Rightarrow \vdash A \wedge d(A \rightarrow B) \leq dB$$

$$(Q6.4) \Rightarrow \vdash \neg A \wedge d(A \vee B) \leq dB$$

$$(Q6.5) \Rightarrow \vdash (A \vee B) \wedge d(\neg A) \leq dB$$

$$(Q6.6) \Rightarrow \vdash (\neg A) \wedge d(B \rightarrow A) \leq d(\neg B)$$

$$(Q7.1) \quad \forall \leq \vdash A \Rightarrow \forall \leq dA$$

$$(Q7.2) \quad g \Rightarrow g(d/\vdash)$$

(b)

2

ist e

n.durch Dialog-führen unter Benutzung

SymM e

Meta-Dialog,gewonnen; er besteht aus

Meta.

Gf₂ die c

Meta-Au.

n (0.1)-(5.2) bilden

Sr₂ die ober

durch sie werden die

bis incl.(

Hierbei ist je

an aus

$M_{\text{eff}}(Q_{\text{eff}}) := \emptyset$

(3.3) Satz: Vor.: Sei $M = \langle \text{SymM},$

$\text{LKhM} = \langle \text{SymM},$

genen modale.

Beh.: LKhM ist konsi

.M.

Beweis: (1) Zur Konsistenz:

(2) Zur Vollständigke

(b) Ein "Kalkül der effektiven homogenen modalen Meta-Logik" ist ein Tripel $LKhM := \langle SymM, Gf_2, Sr_2 \rangle$, wobei
 $SymM$ ein operatives syntakt. System einer homogenen modalen Metasprache (vgl. (1.2)(b)),
 Gf_2 die oben aufgeführte Menge der durch " $\Rightarrow$ " gekennzeichneten Meta-Aussageformen bis incl. (M5.1) und
 Sr_2 die oben aufgeführte Menge von metasprachlichen Regeln bis incl. (M5.3) ist.
 Hierbei ist jeweils " d " durch " Δ " zu ersetzen. Ferner sei
 $M_{eff}(Q_{eff}) := Gf_2 \cup Sr_2$

(3.3) Satz: Vor.: Sei $M = \langle SymM, Dia_2 \rangle$ eine homogene modale Metasprache,
 $LKhM = \langle SymM, Gf_2, Sr_2 \rangle$ ein Kalkül der effektiven homogenen modalen Meta-Logik.

Beh.: $LKhM$ ist konsistent und vollständig bzgl. M .

Beweis: (1) Zur Konsistenz: Man spiele!

(2) Zur Vollständigkeit: Tja ...

4. Kommentar zu $K_{\text{eff}}(Q_{\text{eff}})$

Der Kalkül wurde "spielend", d.h. durch Dialog-führen unter Benutzung der Dialogregeln für den modalen Meta-Dialog, gewonnen; er besteht aus mehreren Teilen:

- a) Die Grundfiguren (mit Variablen) und Regeln (0.1)-(5.2) bilden bekanntlich den Kalkül der effektiven Logik; durch sie werden die formal-wahren Meta-Aussagen erfaßt.

Eine ableitbare formal-wahre Figur ist z.B. $\neg \bar{A} \leq V$, die man aus (5.0') mit $\bar{A} = \neg \bar{A}$ gewinnt.

Ableitbare formal-wahre Regeln sind etwa

$$(DR1) \quad \bar{A} \leq \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \wedge \bar{C} \leq \bar{B} \wedge \bar{C}$$

$$(DR2) \quad \bar{A} \Rightarrow \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \vee \bar{C} \leq \bar{B} \vee \bar{C}$$

$$(DR3) \quad \bar{A} \leq \bar{B} \Rightarrow \bar{C} \Rightarrow \bar{A} \leq \bar{C} \Rightarrow \bar{B}$$

$$\begin{array}{l} \text{Bew. zu (DR1): } (2.1) \quad \bar{A} \wedge \bar{C} \leq \bar{A} \\ \text{Vorauss. } \bar{A} \leq \bar{B} \end{array} \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \\ (1.2) \end{array} \right\} \bar{A} \wedge \bar{C} \leq \bar{B} \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \\ (2.2) \quad \bar{A} \wedge \bar{C} \leq \bar{C} \end{array} \right\} (3.1) \quad \bar{A} \wedge \bar{C} \leq \bar{B} \wedge \bar{C}$$

zu (DR2) und (DR3): Leichte Übung für den Leser!

- b) (MO.1) (bzw. (MO.2)) beagt zusammen mit (5.0) (bzw. (5.0')), daß das metasprachlich Falsche, d.i. $\bar{A}$, im Dialog äquivalent ist mit dem modal Falschen, d.i. dA .
- c) (MO.3) bis (MO.10) stellen die wichtigen Zusammenhänge zwischen den metasprachlichen Funktoren einerseits und den objektsprachlichen Funktoren andererseits dar. Während sich die Konjunktionen als gleichwertig erweisen - d.h. (MO.5) ist umkehrbar zu (MO.5') -, ist die metasprachliche Adjunktion stärker, die metasprachliche Subjunktion und Negation schwächer. Umkehrungen zu (MO.3), (MO.4) und (MO.6) lassen sich im modalen Meta-Dialog nicht verteidigen! Bei den Regeln allerdings erweisen sich neben den Konjunktionen auch die Subjunktionen als gleichwertig.
- d) (M3.3) bis (M5.3) ist der Rest einer "modalen Übersetzung des Kalküls der effektiven Quantenlogik", womit folgendes gemeint ist: Man setze in Q_{eff} überall links und rechts von " $\leq$ " ein " d "; so erhält man die "modale Übersetzung des Q_{eff} ":
- $$(m1.1) \quad \Rightarrow \quad dA \leq dA$$
- $$(m1.2) \quad dA \leq dB \ \& \ dB \leq dC \Rightarrow dA \leq dC$$
- $$(m2.1) \quad \Rightarrow \quad d(A \wedge B) \leq dA$$
- $$(m2.2) \quad \Rightarrow \quad d(A \wedge B) \leq dB$$
- $$(m2.3) \quad dC \leq dA \ \& \ dC \leq dB \Rightarrow dC \leq d(A \wedge B)$$

- (m3.1) $\Rightarrow dA \leq d(A \vee B)$
 (m3.2) $\Rightarrow dB \leq d(A \vee B)$
 (m3.3) $dA \leq dC \ \& \ dB \leq dC \Rightarrow d(A \vee B) \leq dC$
 (m4.1) $\Rightarrow d(A \wedge (A \rightarrow B)) \leq dB$
 (m4.2) $d(A \wedge B) \leq dC \Rightarrow d(A \rightarrow B) \leq d(A \rightarrow C)$
 (m4.3) $dA \leq d(B \rightarrow A) \Rightarrow dB \leq d(A \rightarrow B)$
 (m4.4) $dB \leq d(A \rightarrow B) \ \& \ dC \leq d(A \rightarrow C) \Rightarrow d(B * C) \leq d(A \rightarrow (B * C))$
 mit $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
 (m5.0) $\Rightarrow d\Delta \leq dA$
 (m5.0') $\Rightarrow dA \leq dV$
 (m5.1) $\Rightarrow d(A \wedge \neg A) \leq d\Delta$
 (m5.2) $d(A \wedge B) \leq d\Delta \Rightarrow d(A \rightarrow B) \leq d(\neg A)$
 (m5.3) $dA \leq d(B \rightarrow A) \Rightarrow d(\neg A) \leq d(B \rightarrow \neg A)$

Für die so entstehenden modalen Meta-Aussagen bzw. Regeln besitzt der Proponent im Dialog auf Grund des Satzes von Aristoteles eine Gewinnstrategie; diese Aussagen müssen also im Kalkül alle erfaßt werden.

(α) Auf Grund von (MO.5) und (MO.5') erkennt man sofort, daß (m1.1) bis (m2.3) formal-wahr sind, also bereits durch (0.1)-(MO.10) erfaßt werden.

(β) Wegen (MO.4) sind (m3.1) und (m3.2) aus den analogen formal-wahren Aussagen ableitbar.

(γ) (m4.1) kann zunächst wegen (MO.5) und (MO.5') in der Form $dA \wedge d(A \rightarrow B) \leq dB$ geschrieben werden. Wegen (MO.3) ist dies aber aus der formal-wahren Aussage (4.1) ableitbar.

(δ) (m5.0 ist mit (5.0) und (MO.1), (m5.0') mit (5.0') und (MO.2) ableitbar.

(ϵ) (m5.1) ist mit (5.0), (5.1) und (MO.6) ableitbar.

(ζ) Die verbleibenden Regeln werden nun daraufhin untersucht, ob vielleicht sogar eine stärkere Form vom Proponenten verteidigbar ist. Zu (m3.3): Wegen (MO.4) wäre nur eine Abschwächung der Konklusion möglich; also wird (m3.3) als (M3.3) in den Kalkül übernommen.

Zu (m4.2): Wegen (MO.5) und (MO.5') könnte man die Prämisse auch als $dA \wedge dC \leq dB$ schreiben. Wegen (MO.3) wäre die Konklusion nur zu $dA \Rightarrow dC \leq d(A \rightarrow B)$ zu verschärfen; doch kann der Proponent nicht einmal die schwächere Form $dA \Rightarrow dC \leq dA \Rightarrow dB$ verteidigen! Also wird (m4.2) als (M4.2) in den Kalkül übernommen.

Zu (m4.3): Wegen (MO.3) wäre nur eine Abschwächung der Konklusion

möglich. Bei einer Abschwächung der Prämisse auf $dA \leq dB \Rightarrow dA$ kann der Proponent die Regel nicht mehr verteidigen. Also wird (m4.3) als (M4.3) übernommen.

Zu (m4.4), (m5.2) und (m5.3): Auch hier sind keine Verschärfungen möglich. Leichte Übung für den interessierten Leser!

e) (Q6.1)-(Q6.6) sind einige(!) Grundfiguren, in denen "Mögliches", d.h. Aussagen mit einem "d", mit "Faktischem", d.h. Aussagen mit " $\vdash$ ", gemischt sind.

Besonders interessant ist die Figur (Q6.1), die sich nicht umkehren läßt. Sie läßt sich interpretieren als: "Wenn etwas faktisch ist, dann ist es auch notwendig." und steht im Widerspruch zum Axiom $\Delta p \rightarrow p$, wie es in allen bekannten Axiomensystemen der Modallogik, deren Syntax Δ und $\rightarrow$ umfaßt, erscheint (T, S1-S5 etc.; vgl. []). Man empfand es bei der Aufstellung von modalen Axiomensystemen eben als selbstverständlich, daß etwas Notwendiges faktisch ist, aber das Umgekehrte nicht gelten muß. Darauf soll später noch näher eingegangen werden.

(Q7.2) ist trivial, da eine Figur, die für alle W gilt, auch für $W=V$ gilt, d.h. im Kalkül ableitbar ist.

(Q7.1) bedeutet zusammen mit (Q7.2) - das die Umkehrung von (Q7.1) ermöglicht! - , daß die Meta-Aussagen "Die Aussage A ist quantenlogisch gültig" und "Die Aussage A ist notwendig" gleichbedeutend sind, was bereits in §1. festgestellt wurde.

Ferner kann man die Frage stellen, ob weitere Grundfiguren und Regeln dem Kalkül hinzugefügt werden müssen, damit Figuren der Form $\vdash A$, wobei A in Q_{eff} ableitbar ist, in $K_{\text{eff}}(Q_{\text{eff}})$ ableitbar sind, denn diese kann ja der Proponent im Meta-Dialog verteidigen. Es ist naheliegend, dazu in Q_{eff} links und rechts von " $\leq$ " ein " $\vdash$ " zu setzen; man erhält so Meta-Aussagen der Form $\vdash A \leq \vdash B$ bzw. Regeln mit solchen Meta-Aussagen. Auf Grund der Dialogregeln kann der Proponent diese Meta-Aussagen und Regeln verteidigen, da $A \rightarrow B$ objektsprachlich, d.h. quantenlogisch gültig ist. Wie oben bei d) fragt man sich nun, was von dieser "Meta-Übersetzung von Q_{eff} " (p1.1)-(p5.3) bereits erfaßt ist:

Zunächst bemerkt man, daß wegen (Q7.1) und (Q7.2) für " $\vdash$ " zu (M0.1)-(M0.10) analoge Grundfiguren und Regeln ableitbar sind. Mit den gleichen Argumenten wie in d) entfallen daher alle Grundfiguren und alle Regeln außer (p3.3), (p4.2)-(p4.4), (p5.2) und (p5.3); mittels (Q7.1), (Q7.2) und den analogen Regeln (M3.3)-(M5.3) lassen sich aber auch diese ableiten.

axiomatic modal prop. calculus T

- A1. $(p \vee p) \rightarrow p$
 A2. $q \rightarrow (p \vee q)$
 A3. $(p \vee q) \rightarrow (p \vee q)$
 A4. $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$
 A5. $Lp \rightarrow p$ $[p \not\rightarrow Lp]$

p, q, r non modal propositions

- A6. $L(p \rightarrow q) \rightarrow (Lp \rightarrow Lq)$
 TR1. Rule of uniform subst.
 TR2. $\vdash \alpha, \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \vdash \beta$
 TR3. $\vdash \alpha \rightarrow \vdash L\alpha$

$$DR1: \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \vdash (L\alpha \rightarrow L\beta)$$

$$T1. p \rightarrow Mp$$

$$T3: L(p \vee q) \Leftrightarrow (Lp \wedge Lq)$$

Theorems / Rules provable without using A6.

$$Lp \rightarrow p \rightarrow Mp$$

constructive modal prop. calculus K(C)

$$(1.1), (3.3) \models \bar{A} \vee \bar{A} \Rightarrow A$$

$$(3.2) \models \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$$

$$(3.1), (3.2), (3.3) \models \bar{A} \vee \bar{B} \Rightarrow \bar{B} \vee \bar{A}$$

$$\text{distr.}, (1.2), (1.2) \models (\bar{B} \Rightarrow \bar{C}) \Rightarrow ([\bar{A} \vee \bar{B}] \Rightarrow [\bar{A} \vee \bar{C}])$$

$$(Q6.1) \models \vdash A \Rightarrow \Delta A \quad [\not\models \Delta A \Rightarrow \vdash A]$$

$$(M2.3) \models \Delta(A \rightarrow B) \Rightarrow (\Delta A \Rightarrow \Delta B)$$

trivial assumption

deducible (MP)

$$(Q7.1) \models \vdash A \Leftrightarrow \vdash \Delta A$$

$$(Q6.1), (M2.3), MP: \models \vdash (A \rightarrow B) \Leftrightarrow \vdash \Delta A \Rightarrow \Delta B$$

$$[\not\models \vdash A \Leftrightarrow \vdash \Delta \neg A] \text{ ded. } \models \Delta A \Rightarrow \nabla A$$

$$(M0.5): \models \Delta(A \wedge B) \Leftrightarrow (\Delta A \wedge \Delta B)$$

deducible Formulae / Rules

$$\vdash A \Rightarrow \Delta A \Rightarrow \nabla A$$

Literatur

- [1] Lorenzen, P.: Einführung in die operative Logik und Mathematik; Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955
- [2] v. Weizsäcker, C.F.: Komplementarität und Logik; Naturwiss. 42 (1955) p. 545-555
- [3] Mittelstaedt, P.: Quantenlogik; Fortschr. Physik 9 (1961) p. 106-147
- [4] Lorenzen, P.: Metamathematik; Bibl. Inst., Mannheim-Wien-Zürich, 1962
- [5] Lorenz, K.: Dialogspiele als semantische Grundlage von Logikkalkülen Arch. Math. Logik Grundlagenforsch. 11 (1968) p. 32-55 und 73-100
- [6] Lorenzen, P.-Schwemmer, O.: Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie, 2. Aufl.; Bibl. Inst., Mannheim-Wien-Zürich, 1975
- [7] Stachow, E.-W.: Completeness of Quantum Logic; J. Phil. Logic 5 (1976) p. 237-280
- [8] Stachow, E.-W.: Quantum Logical Calculi and Lattice Structures; (wird veröffentlicht)
- [9] Mittelstaedt, P.: The Metalogic of Quantum Logic; (Manuskript, dem Biennial Meeting der PSA 1978 in San Francisco vorgelegt)
- [10] Mittelstaedt, P.-Stachow, E.W.: Operational Foundation of Quantum Logic; Found. of Phys. 4 (1974) p. 355-365
- [11] Mittelstaedt, P.: Philosophische Probleme der modernen Physik; 5. Aufl.; Bibl. Inst., Mannheim-Wien-Zürich 1976
- [12] Mittelstaedt, P.-Stachow, E.-W.: The Principle of Excluded Middle in Quantum Logic; J. Phil. Logic 7 (1978) p. 181-208
- [13] v. Neumann, J.: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik; Springer-Verlag, Berlin 1932
- [14] Birkhoff, G.-v. Neumann, J.: The Logic of Quantum Mechanics; Ann. of Math. 37 (1936) p. 823-843
- [15] Jauch, J.M.: Foundations of Quantum Mechanics; Addison-Wesley Publ. Comp., Reading Mass. 1968
- [16] Piron, C.: Foundations of Quantum Physics; W.A. Benjamin Inc., Reading, Mass. 1976
- [17] Stachow, E.-W.: How does Quantum Logic correspond to Physical Reality?; J. Phil. Logic 6 (1977) p. 485-496
- [18] Lorenzen, P.: Zur konstruktiven Deutung der semantischen Vollständigkeit klassischer Quantoren- und Modalkalküle; Arch. math. Logik 15 (1972) p. 103-117

- [19] van Fraassen, Bas C.: Formal Semantics and Logic; The Macmillan Comp.-Collier Macmillan Ltd., New York-London, 1971
- [20] Mittelstaedt, P.: Quantum Logic; Manuskript, der International School of Physics "Enrico Fermi" in Varenna (LVXX Course, 25.7.-6.8.1977) vorgelegt
- [21] Jammer, M.: The Philosophy of Quantum Mechanics; John Wiley & Sons New York etc., 1974
- [22] Mittelstaedt, P.: Quantenlogische Interpretation orthokomplementärer quasimodularer Verbände; Z.Naturforsch. 25a (1970) p.1773-1778
- [23] Mittelstaedt, P.: On the Interpretation of the Lattice of Subspace of the Hilbert Space as a Propositional Calculus; Z.Naturforsch. 27a (1972) p.1358-1362
- [24] Birkhoff, G.: Lattice Theory; Ann.Math.Soc.Coll.Publ.XXV,